

BULLETIN

DE

L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE DE BEOGRAD

ANNÉE 1956

N^{os} 1—2

VOLUME XXI

RÉDACTEUR

M. B. PROTITCH

Naučno delo

IMPRIMERIE ET ÉDITEUR „NAUČNO DELO“

BEOGRAD 1957

BULLETIN

DE

L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE DE BEOGRAD

ANNÉE 1956

NOS 1—2

VOLUME XXI

OBSERVATIONS PHOTOGRAPHIQUES DE PETITES PLANÈTES

faites à l'astrographe de 160 mm

par M. PROTITCH (P) et Č. ČEPINAC (Č)

Planète	Date T.U.	1950.0	($p_{\alpha}\Delta$)	($p_{\delta}\Delta$)	O—C	Obs.
	1956	α	δ			
		$h\ m\ s$	$^{\circ}\ ' \ ''$		m	
3 Juno	Mai	18.02427	19 25 53.73	— 5 46 18.7	9.272n 0.825	0.0 0 Č
	Juin	30.95697	19 2 4.17	— 4 44 22.8	8.255n 0.823	0.0 0 Č
4 Vesta	Mai	4.90622	14 17 16.70	— 1 6 24.5	8.543n 0.798	0.0 0 Č
		5.90274	14 16 21.45	— 1 4 32.1	8.545n 0.802	0.0 0 Č
		9.96177	14 12 42.80	— 0 59 10.8	8.844n 0.798	0.0 0 P
		27.86248	14 0 28.29	— 1 18 40.5	8.660 0.810	0.0 0 P
6 Hebe	Avr.	12.88540	14 31 46.49	+ 7 15 23.4	9.408n 0.740	+ 0.2 — 2 Č
		12.92706	14 31 44.78	+ 7 15 43.9	9.206n 0.731	+ 0.1 — 1 Č
8 Flora	Janv.	9.88538	7 46 27.57	+ 21 23 23.3	9.336n 0.573	+ 0.2 — 3 P
18 Melpomene	Mai	4.95483	15 47 13.58	— 3 39 49.4	8.890n 0.816	— 0.3 + 1 Č
		28.88817	15 24 12.70	— 2 4 8.8	8.502n 0.805	— 0.4 0 P
		31.87151	15 21 30.32	— 1 58 59.2	8.704n 0.905	— 0.4 0 P
23 Thalia	Avr.	13.82151	13 31 38.97	+ 4 9 50.2	8.792n 0.756	+ 0.1 — 13 Č
28 Bellona	Avr.	10.87499	13 4 32.01	+ 6 5 3.8	9.186n 0.741	— 4.1 + 22 Č
		10.92227	13 4 30.23	+ 6 5 23.4	8.524n 0.738	— 4.0 + 22 Č
29 Amphitrite	Mars	30.95555	12 27 31.60	— 5 20 38.1	8.561n 0.828	+ 0.1 — 2 Č
	Avr.	28.86420	12 5 12.03	— 3 49 36.0	8.716n 0.817	+ 0.2 — 2 P
51 Nemausa	Janv.	9.97219	9 15 40.27	+ 2 51 5.0	9.172n 0.769	0.0 0 Č
	Avr.	2.83750	8 36 21.16	+ 12 49 41.1	9.242 0.676	0.0 0 Č
		3.82500	8 36 53.92	+ 12 53 34.9	9.174 0.673	0.0 0 Č
52 Europa	Févr.	16.84786	9 34 48.85	+ 17 15 53.3	8.359 0.606	+ 0.2 — 1 Č
78 Diana	Janv.	9.84649	7 40 26.93	+ 32 57 58.0	9.517n 0.410	— 2.2 + 6 Č
116 Sirona	Janv.	6.86455	6 40 36.44	+ 26 41 52.3	9.259n 0.466	— 9.4 + 7 Č
151 Abundantia	Janv.	17.90205	9 11 4.45	+ 27 7 34.6	9.442n 0.503	— 1.5 + 6 Č
185 Eunike	Mai	10.00344	15 52 15.00	+ 14 1 48.2	8.826 0.652	+ 0.2 0 Č
194 Prokne	Juin	27.85767	18 31 45.21	+ 7 22 13.6	9.411n 0.739	+ 1.3 + 2 P
		30.91322	18 29 14.99	+ 7 8 5.0	8.821n 0.729	+ 1.1 + 2 Č
216 Kleopatra	Juin	10.90972	18 29 38.84	— 7 7 28.5	9.409n 0.828	+ 0.1 + 1 P
221 Eos	Avr.	13.92151	13 31 43.34	+ 4 55 29.2	8.794n 0.749	+ 0.1 — 1 Č
313 Chaldaea	Juin	5.89583	17 27 48.31	— 4 27 23.9	9.064n 0.820	+ 1.4 + 4 P
		6.88888	17 26 50.34	— 4 25 24.8	9.261n 0.818	+ 1.4 + 4 P
357 Ninina	Mai	30.91318	16 59 51.44	— 2 57 4.1	9.094n 0.801	— 0.4 + 1 P
		31.91318	16 59 5.66	— 2 56 32.4	9.064n 0.811	— 0.5 0 P
385 Ilmatar	Janv.	10.85760	8 15 52.88	+ 37 2 52.9	9.572n 0.346	+ 2.0 — 10 Č
402 Chloë	Janv.	9.92358	7 53 49.35	+ 15 0 17.9	9.100n 0.643	+ 1.6 — 2 P
416 Vaticana	Févr.	16.80828	10 13 15.97	+ 31 57 4.9	9.610n 0.529	+ 2.5 — 15 Č
		16.87217	10 13 12.04	+ 31 57 26.2	9.426n 0.392	+ 2.5 — 15 Č
604 Tekmessa	Janv.	6.86455	6 58 36.06	+ 29 40 6.3	9.409n 0.438	+ 0.1 + 7 Č
714 Ulula	Juin	10.90973	18 30 49.92	— 9 29 24.9	9.330n 0.842	+ 0.1 — 2 P
805 Hormuthia	Mai	7.91316	14 52 20.52	+ 3 43 57.6	8.770n 0.759	— 3.1 + 6 P
		9.90066	14 50 55.70	+ 3 54 14.3	8.873n 0.758	— 3.1 + 5 P

OBSERVATIONS À LA LUNETTE ZÉNITHALE

(de 110 mm) du Service de latitude de l'Observatoire

par V. MILOVANOVIĆ (VM), B. ŠEVARLIĆ (BS) et G. TELEKI (GT)

$$\varphi = +44^{\circ} 48' +$$

		IV							V						
1956		20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
		"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"
JANV.	10 GT	10.755	10.883	9.453	10.397	10.228	10.676	10.613	11.578	10.471	10.819	10.172	11.047	—	10.022
	12 GT	11.008	10.642	9.864	10.360	10.350	10.093	10.488	—	—	—	—	—	—	—
	17 GT	—	10.872	9.739	10.607	10.490	10.416	10.171	—	—	—	—	—	—	—
	20 VM	10.583	10.589	9.845	—	9.899	10.265	10.581	11.295	—	10.470	10.071	11.258	10.566	—
	23 VM	10.514	10.458	9.585	—	10.359	10.469	10.416	11.239	10.317	10.610	9.947	10.989	11.103	10.138
		V							VI						
		27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
MARS	6 GT	11.637	10.414	10.826	10.008	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
		VI							VII						
		34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
	28 GT	10.684	11.041	10.581	10.741	10.854	10.714	10.758	11.375	10.770	10.387	10.499	9.742	—	10.683
	29 GT	10.963	10.826	10.662	10.406	10.547	9.999	11.186	10.856	10.649	10.513	10.842	10.309	10.228	10.370
	30 VM	10.993	11.573	10.428	—	—	11.170	10.771	10.955	10.432	10.912	—	10.235	10.481	10.862
AVRIL	3 GT	10.798	11.031	10.454	10.634	10.790	—	—	—	—	—	—	—	—	—
		VII							VIII						
		41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
	11 BS	10.723	10.567	10.839	—	10.383	10.377	10.773	10.232	10.858	10.851	10.736	10.888	10.728	10.824
	13 VM	10.927	10.762	10.751	10.773	10.468	9.992	10.187	10.684	11.048	11.104	10.969	11.732	10.750	10.993
		VIII							IX						
		48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61
MAI	17 BS	10.413	10.713	10.729	10.604	10.469	10.456	10.392	10.438	10.742	10.711	10.443	10.549	10.287	10.032
	24 GT	10.259	10.792	11.173	11.051	—	—	10.585	—	—	—	—	—	—	—
	30 BS	—	10.589	10.329	—	10.233	10.317	10.503	10.503	10.691	10.521	10.810	10.198	10.523	10.245
	31 GT	10.364	10.787	10.544	10.786	10.645	10.505	10.356	10.413	10.748	10.512	10.219	10.341	10.728	9.995
		IX							X						
		55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68
	16 GT	—	—	10.319	10.164	10.269	10.365	10.065	—	—	—	—	—	—	—
	25 GT	10.846	11.373	10.747	11.022	10.491	10.794	9.908	10.680	10.850	—	10.205	10.120	—	—
	27 GT	10.591	—	10.758	10.622	10.997	10.355	10.500	10.325	10.723	10.417	10.298	10.093	10.065	10.105
	28 GT	—	—	10.475	10.591	10.545	10.576	10.273	10.588	10.388	10.723	10.122	10.578	10.161	10.695

DÉTERMINATIONS DE L'HEURE EN 1956

CORRECTIONS DE LA PENDULE FONDAMENTALE ET LEURS ÉCARTS

par Z. M. BRKIĆ et LJ. A. MITIĆ

Date	Cp	E	TU	Obs.	Date	Cp	E	TU	Obs.	Date	Cp	E	TU	Obs.
JANVIER					MARS					M A I				
2	-38.777	-24	15.6	M	28	-56.321	- 5	18.1	B	17	-66.733	+13	1.1	B
6	39.664	-15	17.9	B	29	56.504	-14	18.0	M	17	66.709	-11	19.2	B
7	39.912	+12	20.3	M	30	56.725	+14	18.1	B	21	67.629	+ 2	17.7	B
9	40.330	-10	17.8	B	A V R I L					24	68.373	+ 2	18.9	B
10	40.554	- 6	16.5	B	2	57.277	- 7	19.9	M	27	69.212	0	19.8	M
11	40.794	+13	20.3	B	3	57.477	0	18.9	M	28	69.469	- 3	20.8	B
17	42.111	+16	20.9	M	4	57.667	- 5	18.0	B	29	69.729	- 6	20.8	M
20	42.678	-22	16.6	B	7	58.298	+ 6	20.2	B	30	70.019	+15	21.4	B
22	43.114	- 9	19.8	M	10	58.885	- 5	20.7	M	31	70.260	-17	19.2	B
23	43.332	- 4	17.0	B	11	59.138	+38	18.4	B	J U I N				
25	43.756	-12	20.5	B	12	59.309	- 3	18.4	B	5	71.699	0	20.1	M
FÉVRIER					14	59.749	+36	21.6	M	6	72.037	+37	19.4	B
16	48.090	-13	17.1	M	23	61.548	-17	19.4	B	7	72.270	-32	21.1	B
17	48.308	+ 3	17.5	B	25	61.949	- 3	18.8	B	8	72.611	- 1	19.8	M
22	49.292	- 6	17.3	B	28	62.570	- 3	21.8	M	9	72.922	+ 1	20.5	M
23	49.514	+ 5	16.9	M	29	62.792	0	19.1	M	10	73.272	+37	20.4	M
28	50.497	+ 2	17.3	M	M A I					11	73.552	+ 1	20.0	B
MARS					4	63.878	+ 6	19.5	M	12	73.881	+ 7	21.0	M
6	51.920	-32	17.1	M	5	64.082	0	21.5	M	14	74.598	+43	19.3	B
9	52.594	+16	20.3	B	6	64.282	+ 2	18.4	B	16	75.271	- 7	21.1	M
18	54.369	-30	19.5	M	7	64.469	- 1	18.7	B	25	78.252	-11	19.3	B
19	54.569	-24	18.5	B	8	64.679	- 3	19.0	M	27	78.883	+ 8	19.2	B
20	-54.806	+20	18.5	M	9	-64.925	+29	18.7	B	28	-79.186	+61	21.7	B

HEURES DEMI-DÉFINITIVES DES ÉMISSIONS ENREGISTRÉES DE T. S. F.
DÉDUITES DES DÉTERMINATIONS DE L'HEURE, FAITES EN 1956,
À L'OBSERVATOIRE DE BEOGRAD

par
Z. M. BRKIĆ et LJ. A. MITIĆ

J A N V I E R									F É V R I E R									
RWM	TQC ₉	TQG ₅	GIC ₂₉	RWM	GIC ₂₇				RWM	TQC ₉	TQG ₅	GIC ₂₉	RWM	GIC ₂₇				
20.16	27.84	21.62	32.09	20.16	40.55	$\Delta\lambda$	ΔT_s	TU_2-TU_0	20.16	27.84	21.62	32.09	20.16	40.55	$\Delta\lambda$	ΔT_s	TU_2-TU_0	
6h 6m	8h 6m	9h 36m	10h 6m	12h 6m	18h 6m	en 10 ⁻³			6h 6m	8h 6m	9h 36m	10h 6m	12h 6m	18h 6m	en 10 ⁻³			
1	—	021	028	988	—	958	—17	—11	—28	—	990	985	943	960	940	—19	—7	—26
2	—	028	041	996	971	—	17	11	28	958	987	983	951	959	937	19	6	25
3	—	022	026	994	976	998	17	11	28	958	991	986	948	960	931	19	6	25
4	—	038	032	005	979	003	17	11	28	957	988	984	949	956	934	19	6	25
5	—	033	032	017	—	004	18	10	28	954	998	985	928	940	931	19	6	25
6	—	012	030	998	984	990	18	10	28	958	005	011	931	964	938	19	6	25
7	999	024	026	996	980	986	18	10	28	956	993	996	935	956	942	19	6	25
8	—	035	030	993	976	983	18	10	28	972	023	028	940	975	942	19	5	24
9	977	020	023	981	972	979	18	10	28	979	017	020	967	—	953	19	5	24
10	035	022	025	—	970	964	18	10	28	991	016	023	961	985	952	19	5	24
11	963	011	018	979	951	966	18	10	28	978	019	999	965	981	956	19	5	24
12	987	021	021	973	962	968	18	10	28	002	025	026	957	987	964	19	4	23
13	954	018	012	951	939	951	18	9	27	994	026	028	961	996	970	20	4	24
14	—	007	005	950	914	—	18	9	27	990	030	015	951	988	944	20	4	24
15	968	049	052	983	967	978	18	9	27	988	027	026	050	991	949	20	4	24
16	958	040	034	967	947	961	18	9	27	991	017	021	957	985	933	20	3	23
17	936	019	011	950	936	957	18	9	27	008	012	015	048	982	952	20	3	23
18	—	019	021	953	935	959	18	9	27	977	012	011	940	977	948	20	3	23
19	945	019	018	953	931	954	18	9	27	969	013	999	942	978	944	20	3	23
20	932	018	018	959	931	959	18	8	26	983	012	014	948	980	964	20	2	22
21	934	000	000	952	928	945	18	8	26	976	004	001	933	966	933	20	2	22
22	—	993	999	950	933	944	19	8	27	969	014	008	—	966	946	20	2	22
23	933	995	993	950	—	983	19	8	27	973	020	027	—	972	967	20	1	21
24	961	013	012	978	945	—	19	8	27	973	036	037	963	972	944	20	1	21
25	948	991	986	960	950	960	19	8	27	962	—	039	939	962	946	20	—1	21
26	945	979	981	943	942	949	19	8	27	969	040	031	942	964	946	20	0	20
27	960	989	992	956	971	964	19	8	27	969	029	032	953	969	954	20	0	20
28	973	999	996	956	971	949	19	7	26	975	013	013	940	965	948	20	0	20
29	967	—	996	952	969	—	19	7	26	973	014	017	961	977	957	—20	+1	—19
30	962	986	984	954	952	939	19	7	26									
31	957	985	983	981	958	947	—19	—7	—26									

Les heures de réception des signaux horaires sont données en temps TU_2 ; $TU_2 = TU_0 + \Delta\lambda + \Delta T_s$, c'est à dire on a tenu compte d'influence du mouvement du pôle

$\Delta\lambda$ et des variations de rotation de la Terre ΔT_s . Les corrections $\Delta\lambda$ et ΔT_s ainsi que la différence $TU_2 - TU_0$ sont données dans les trois dernières colonnes.

HEURES DEMI-DÉFINITIVES DES ÉMISSIONS ENREGISTRÉES DE T. S. F.
DÉDUITES DES DÉTERMINATIONS DE L'HEURE, FAITES EN 1956,
À L'OBSERVATOIRE DE BEOGRAD,

par
Z. M. BRKIĆ et LJ. A. MITIĆ

M A R S										A V R I L									
RWM	TQC ₀	TQG ₅	GKU ₅	RWM	GPB ₃₀	$\Delta\lambda$	ΔT_s	$TU_2 - TU_0$		RWM	TQC ₀	TQG ₅	GKU ₅	RWM	GPB ₃₀	$\Delta\lambda$	ΔT_s	$TU_2 - TU_0$	
20.16	27.84	21.62	23.46	20.16	29.03					20.16	27.84	21.62	23.46	20.16	29.03				
6h 6m	8h 6m	9h 36m	10h 6m	12h 6m	18h 6m	en 10 ⁻³				6h 6m	8h 6m	9h 36m	10h 6m	12h 6m	18h 6m	en 10 ⁻³			
1	956	995	993	939	960	926	-20	+ 1	-19	955	004	007	943	954	970	-19	+16	- 3	
2	942	997	999	936	954	926	20	2	18	961	002	010	949	967	954	19	16	3	
3	946	007	999	930	941	957	21	2	19	951	003	002	958	955	942	19	17	2	
4	979	052	035	961	979	952	21	2	19	963	017	015	957	973	972	19	17	2	
5	973	019	020	953	956	—	21	3	18	971	026	019	956	972	948	19	18	1	
6	957	023	016	—	955	935	21	3	18	—	011	009	963	966	943	19	18	- 1	
7	957	—	021	947	958	—	21	4	17	961	002	995	948	974	932	19	19	0	
8	960	026	030	952	961	941	21	4	17	960	984	004	947	964	944	19	19	0	
9	947	—	019	945	962	952	21	4	17	970	990	997	959	989	953	18	20	+ 2	
10	960	029	034	—	960	946	21	5	16	980	997	995	955	992	—	18	20	2	
11	950	—	026	946	947	949	21	5	16	976	992	997	957	993	—	18	21	3	
12	949	023	025	948	940	944	21	6	15	984	006	995	957	989	969	18	22	4	
13	942	013	008	936	926	937	21	6	15	973	990	997	951	971	943	18	22	4	
14	—	018	018	951	—	931	21	6	15	972	006	987	950	987	946	17	23	6	
15	937	—	018	947	941	932	21	7	14	—	992	980	942	—	953	17	23	6	
16	937	999	004	939	941	934	21	7	14	—	—	033	—	035	003	17	24	7	
17	938	016	011	937	944	926	21	8	13	038	055	043	999	048	012	17	24	7	
18	957	—	026	953	953	944	21	8	13	049	063	039	009	046	992	17	24	7	
19	941	019	019	940	947	921	21	9	12	022	017	007	983	024	963	16	25	9	
20	943	008	009	933	930	926	21	9	12	009	015	998	973	017	970	16	26	10	
21	946	008	996	—	—	977	21	10	11	908	995	984	969	007	972	16	26	10	
22	966	032	025	—	960	963	21	10	11	001	989	986	—	004	966	16	26	10	
23	948	017	007	948	962	940	20	11	9	016	014	007	982	020	984	16	27	11	
24	949	010	009	951	954	951	20	12	8	021	020	020	008	026	975	15	27	12	
25	945	004	005	940	942	924	20	12	8	—	006	013	987	032	985	15	28	13	
26	927	990	986	926	942	—	20	12	8	002	004	996	979	006	973	15	28	13	
27	928	991	984	931	933	955	20	13	7	016	994	017	999	020	—	15	29	14	
28	947	007	000	955	964	947	20	14	6	022	005	003	991	025	986	15	29	14	
29	948	984	997	943	958	932	20	14	6	034	—	015	998	033	006	14	29	15	
30	959	012	997	—	952	945	20	15	5	035	992	999	996	028	002	-14	+30	+16	
31	965	005	003	954	963	941	-20	+15	- 5										

Les heures de réception des signaux horaires sont données en temps TU_2 ; $TU_2 = TU_0 + \Delta\lambda + \Delta T_s$, c'est à dire on a tenu compte d'influence du mouvement du pôle

$\Delta\lambda$ et des variations de rotation de la Terre ΔT_s . Les corrections $\Delta\lambda$ et ΔT_s ainsi que la différence $TU_2 - TU_0$ sont données dans les trois dernières colonnes.

HEURES DEMI-DÉFINITIVES DES ÉMISSIONS ENREGISTRÉES DE T. S. F.
DÉDUITES DES DÉTERMINATIONS DE L'HEURE, FAITES EN 1956,
À L'OBSERVATOIRE DE BEOGRAD

par
Z. M. BRKIĆ et LJ. A. MITIĆ

M A I

J U I N

RWM	TQC ₉	TQG ₅	GIC ₃₃	RWM	GPB ₃₀				RWM	TQC ₉	TQG ₅	GIC ₃₃	RWM	GPB ₃₀				
20.16	27.84	21.62	22.13	20.16	29.03	$\Delta\lambda$	ΔT_s	TU_2-TU_0	20.16	27.84	21.62	22.13	20.16	29.03	$\Delta\lambda$	ΔT_s	TU_2-TU_0	
6h 6m	8h 6m	9h 36m	10h 6m	12h 6m	18h 6m	en 10 ⁻³			6h 6m	8h 6m	9h 36m	10h 6m	12h 6m	18h 6m	en 10 ⁻³			
1	020	999	994	037	033	986	-14	+30	+16	994	017	015	997	995	973	-6	+35	+29
2	021	988	980	028	016	992	14	30	16	989	997	999	985	990	-	6	35	29
3	037	986	979	029	027	983	14	31	17	003	027	010	005	011	990	6	35	29
4	013	984	971	032	020	986	13	31	18	017	-	019	-	015	-	5	34	29
5	996	976	967	017	002	968	13	32	19	992	003	001	003	987	964	5	34	29
6	010	994	971	019	010	970	13	32	19	979	000	000	-	980	953	5	34	29
7	013	996	987	039	026	983	13	32	19	980	004	004	985	989	-	5	34	29
8	036	013	000	067	042	985	12	32	20	999	-	014	991	000	973	5	34	29
9	036	019	005	045	038	-	12	33	21	998	-	027	998	000	996	5	34	29
10	050	022	006	022	041	995	12	33	21	002	025	029	028	000	011	4	33	29
11	038	013	014	020	038	988	12	33	21	010	038	028	026	001	039	4	33	29
12	022	009	010	007	031	979	11	34	23	005	040	034	065	009	026	4	32	28
13	034	997	002	010	032	988	11	34	23	-	039	031	040	-	027	4	32	28
14	026	007	004	021	041	990	11	34	23	003	042	022	030	005	022	4	32	28
15	028	007	010	026	030	995	10	34	24	011	035	027	037	004	041	4	32	28
16	028	991	996	020	034	993	10	34	24	987	024	022	033	987	019	4	31	27
17	013	003	004	023	026	987	10	34	24	971	000	996	008	959	986	4	31	27
18	026	016	014	026	038	001	10	35	25	958	986	983	019	954	-	4	30	26
19	028	013	007	018	027	993	9	35	26	959	982	978	989	953	-	4	30	26
20	017	013	991	007	011	-	9	35	26	960	997	997	021	957	-	3	29	26
21	016	010	001	020	033	001	9	35	26	962	992	995	008	969	-	3	29	26
22	023	002	000	985	025	-	9	35	26	965	997	000	004	966	-	3	28	25
23	035	004	993	001	033	975	9	35	26	955	995	994	992	998	-	3	28	25
24	021	011	004	999	034	985	8	35	27	978	016	017	015	977	996	3	28	25
25	026	-	014	995	038	-	8	35	27	991	028	023	021	980	007	3	27	24
26	025	023	022	005	026	974	8	35	27	995	037	038	-	996	-	3	26	23
27	012	018	016	-	011	957	8	35	27	011	058	052	043	027	043	3	26	23
28	009	020	018	989	008	972	7	35	28	026	071	067	-	033	010	3	25	22
29	017	021	024	999	026	974	7	35	28	010	046	039	029	010	-	3	25	22
30	028	022	018	000	029	982	7	35	28	003	-	017	016	997	-	-2	+24	+22
31	997	-	007	991	995	962	-6	+35	+29									

Les heures de réception des signaux horaires sont données en temps TU_2 ; $TU_2 = TU_0 + \Delta\lambda + \Delta T_s$, c'est à dire on a tenu compte d'influence du mouvement du pôle

$\Delta\lambda$ et des variations de rotation de la Terre ΔT_s . Les corrections $\Delta\lambda$ et ΔT_s ainsi que la différence $TU_2 - TU_0$ sont données dans les trois dernières colonnes.

OCCULTATIONS D'ÉTOILES PAR LA LUNE

observées à l'Observatoire de Beograd en 1956*)

Date	N.Z.C. №	Ph.	Temps Universel	Obs. et Instr.	Bord	Rem.	Date	N.Z.C. №	Ph.	Temps Universel	Obs. et Instr.	Bord	Rem.
JANV.	6 1970	R 4	^h 50 ^m 49.01	A—GR	v,C	b	MARS	18 766	D 21	^h 54 ^m 59.29	D—PR	v	b
	17 3397	D 17	03 49.31	M—PR	—	tb					59.45	P—AZ	v,C b
			49.44	C—AZ	v	b		19 905	D 17	25 51.79	B—PR	v	tb
	20 244	D 19	43 20.45	O—GR	v	tb					51.88	P—AZ	v tb
			20.39	B—PR	v	tb		19 935	D 23	00 20.89	B—PR	v	b
			20.45	P—AZ	v,C	tb					21.07	T—AA	v m
	22 500**	D 16	29 56.95	O—GR	p	tb					20.70	P—AZ	v,C tb
			57.94	O—GR	p	tb		22 1341	D 18	28 49.36	D—GR	i	r
			57.96	M—PR	p	b					48.85	M—PR	i b
	30 1582	R 2	57 06.91	A—GR	i,C	tb					48.90	T—AA	i b
			06.57	P—AZ	i,C	b					49.05	C—AZ	i b
FÉVR.	5 2290	R 3	42 09.54	C—AZ	i,C	b	AVRIL	14 725	D 20	09 08.11	A—GR	v	b
	16 197	D 16	52 50.85	T—AA	v	tb					08.21	C—AZ	v tb
			50.84	C—AZ	v	b					22.05	B—PR	i,C m
	17 348	D 20	39 32.85	B—PR	v	tb	JUIN	11 1234	D 19	11 08.43	B—PR	i	b
			29.50	P—AZ	p,C	m		28 3326	R 23	22 08.59	D—AA	i	m
MARS	18 752	D 20	04 48.44	P—AZ	v,C	tb					08.43	C—AZ	i b

Abreviations:

Bord (de la Lune): v = visible; p = à peine visible; i = invisible; C = en Ci.

Remarques: tb = très bonne; b = bonne; m = médiocre; r = en retard.

Observateurs: { A = Dačić; B = Brkić; C = Čepinac; D = Djurković;
M = Mitić; O = Oskanjan; P = Protitch; T = Teleki.

*) Pour les constantes instrumentales voir Bulletin de l'Obs. astr. de Beograd Vol. XIX, Nos 3—4, 1953.

**) Étoile double.

IDENTIFICATIONS DES PETITES PLANÈTES

par R. S. MITRINOVIĆ

I

1924 TZ = 1952 DA

Nous avons publié [cf. Bulletin Astronomique de l'Observatoire Royal de Belgique à Uccle, Volume IV № 8, p. 203] l'identification des petites planètes suivantes:

1942 GH = 1931 DQ = 1952 DA,

en prenant comme point de départ les éléments de la dernière planète.

Dans le *Katalog* de K. Reinmuth [cf. *Katalog von 6500 genauen photographischen Positionen KLEINER PLANETEN*, Karlsruhe, 1953] est publiée la correction des observations du 23 et du 25 décembre 1924 relatives à la petite planète 1924 TZ. Mettant à profit ceci, nous avons conclu que: 1924 TZ = 1952 DA.

Nous avons pris, comme les éléments fondamentaux, les éléments de la planète 1952 DA (MPC—895).

Pour la correction empirique $dM = -0^{\circ}.375$ nous avons obtenu les différences (O — C) suivantes:

	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	^m	
1924 — XI — 29	+ 1.1	— 16'
XII — 23	+ 0.4	— 6
XII — 25	+ 0.3	— 6

L'observation datée du 29 novembre 1924 n'est pas suffisamment certaine (BZ — 1924/37). Cette constatation due à K. Reinmuth et notre résultat:

$$\Delta\alpha = + 1.1, \quad \Delta\delta = -16'$$

sont en accord.

Par suite, on pourrait constater que l'observation du 29 novembre 1924 n'appartient pas aux planètes 1924 TZ et 1952 DA.

Les observations du 23 et du 25 décembre 1924 marqués par 1924 TZ correspondent à l'objet 1952 DA.

II

1934 TD = 1955 XA

A l'aide des éléments elliptiques de la petite planète 1934 TD (MPC—1012) et d'une correction empirique $dM = + 0^{\circ}.588$, nous avons obtenu l'identité précédente.

Les (O — C) sont les suivants:

		$\Delta\alpha$ <i>m</i>	$\Delta\delta$
1955 — XII —	9.64	+ 0.1	+ 2'
XII —	13.61	0.0	+ 2
XII —	17.60	0.0	+ 2
XII —	19.60	— 0.1	+ 1
1956 — I —	13.04	— 0.3	0
I —	13.08	— 0.4	0

Éphéméride pour 1957, 0^h T.U. ($dM = + 0^{\circ}.588$)

	α (1950.0)	δ (1950.0)	119
	<i>h m</i>	<i>° ' "</i>	<i>m</i>
Mars 21	14 3.9	— 10 8	15.8
			6.8
31	13 57.1	— 9 17	0.481
			8.1
Avr. 10	13 49.0	— 8 19	— 104'
			18
20	13 40.4	— 7 20	+ 18.2
			8.6
30	13 32.1	— 6 25	(— 5'.7)
			8.3
Mai 10	13 25.0	— 5 39	0.307
			7.1

III

1932 BH = 1955 BL

En partant des éléments elliptiques de la petite planète 1932 BH, publiés dans AN 247.163, et après une correction empirique $dM = - 0^{\circ}.666$, on obtient la représentation suivante d'une seule observation en 1955:

	$\Delta\alpha$ <i>m</i>	$\Delta\delta$
1955 — I —	26.1	0.0 — 2'

ce qui prouve l'identité de ces deux objets.

IV

1933 OE = 1955 FC

Si l'on part des éléments elliptiques de la petite planète 1933 OE, publiée dans MPC—1215, et après une correction empirique $dM = + 1^{\circ}.682$, on trouve la représentation suivante des observations en 1955:

	$\Delta\alpha$ <i>m</i>	$\Delta\delta$	
1955 — III —	20.27	— 1.0	+ 2' MPC—1222
III —	23.21	0.0	+ 2
III —	23.25	0.0	+ 2
III —	30.29	0.0	+ 2
III —	30.33	0.0	+ 2
IV —	22.18	0.0	+ 2
IV —	22.22	0.0	+ 2
IV —	22.18	— 0.2	+ 2 MPC—1225
V —	19.23	0.0	+ 2 MPC—1309
V —	20.12	— 0.1	+ 2

ce qui prouve l'identité de ces deux objets.

La position du 20 mars 1955 n'appartient pas à 1955 FC, O — C étant: $- 1^m.0 + 2'.$ La mesure est peut-être inexacte.

V

1923 OD = 1955 VZ

À partir des éléments elliptiques de la petite planète 1923 OD, publiés dans MPC—1080, et si l'on fait la correction empirique $dM = - 2^{\circ}.611$, on a la représentation suivante des observations en 1955:

	$\Delta\alpha$ <i>m</i>	$\Delta\delta$
1955 — XI —	11.56	0.0 0'
XI —	12.63	0.0 0
XI —	16.61	0.0 0
XI —	18.67	0.0 0
XI —	20.64	— 0.1 — 1
XI —	22.63	— 0.2 — 1
XI —	24.55	— 0.2 — 1
XII —	2.49	— 0.4 — 2
XII —	3.46	— 0.4 — 2
XII —	6.51	— 0.6 — 3
XII —	9.44	— 0.7 — 3
XII —	13.48	— 0.9 — 4
XII —	17.53	— 1.1 — 5

ce qui prouve l'identité de ces deux objets.

ORBITES CIRCULAIRES DES PETITES PLANÈTES

par RUŽICA S. MITRINOVIĆ

Planète	Époque oh U.T.	u ₀	1950.0		μ	a	Observations	Remarques
			Ω	i				
1949 SA	49 Oct. 7	7.736	356.229	18.697	0.07808	5.4242	Sept. 23, Oct. 22	
1950 DN	50 Févr. 20	194.304	316.609	10.932	0.20981	2.8049	Févr. 17, 23	1)
1951 RE	51 Sept. 5	170.015	175.470	9.593	0.24803	2.5088	Sept. 4, 6	2)
1951 RH	51 Sept. 5	7.430	339.486	15.866	0.19522	2.9430	Sept. 4, 6	
1951 RR	51 Sept. 4	32.211	315.382	5.019	0.28586	2.2825	Sept. 4, 5	
1951 XJ	51 Déc. 4	318.135	106.406	21.568	0.08927	4.9584	Déc. 4, 22	
1954 HH	54 Mai 2	2.857	215.168	4.066	0.35361	1.9806	Avr. 28, Mai 6	
1954 RA	54 Sept. 4	169.298	164.594	4.960	0.26451	2.4035	Sept. 3, 5	3)
1954 RJ	54 Sept. 24	4.625	356.472	34.181	0.21370	2.7707	Août 29, Oct. 2	
1954 TB	54 Oct. 14	283.207	94.099	2.827	0.18192	3.0847	Oct. 3, 25	4)
1954 UD	54 Nov. 17	357.805	48.003	7.595	0.27104	2.3648	Oct. 28, Nov. 17	5)
1954 UH ₂	54 Nov. 17	267.163	138.648	2.691	0.18425	3.0600	Oct. 28, Nov. 17	
1954 UJ ₂	54 Nov. 16	175.410	230.885	5.042	0.21895	2.7263	Oct. 28, Nov. 17	
1954 UK ₂	54 Nov. 16	6.038	40.222	11.805	0.23730	2.5838	Oct. 28, Nov. 17	
1954 UM ₂	54 Nov. 16	3.387	41.122	35.115	0.14950	3.5160	Oct. 28, Nov. 17	
1954 UN ₂	54 Nov. 16	188.521	216.037	8.197	0.22943	2.6430	Oct. 28, Nov. 17	
1955 BF	55 Févr. 7	148.085	354.803	4.329	0.17582	3.1556	Jan. 29, Fevr. 15	
1955 FF	55 Avr. 22	238.757	245.929	2.938	0.22516	2.6760	Mars 30, Avr. 22	
1955 FT	55 Mars 29	141.425	43.739	10.401	0.18811	3.0164	Mars 16, 29	
1955 FU	55 Avr. 22	14.156	175.229	27.657	0.16822	3.2500	Mars 29, Avr. 22	
1955 GA	55 Avr. 16	110.045	96.358	11.009	0.18766	3.0216	Avr. 1, 30	6)
1955 GB	55 Avr. 16	69.633	316.096	8.504	0.34682	2.0063	Avr. 1, 30	
1955 HA	55 Avr. 28	359.542	199.100	26.843	0.30144	2.2030	Avr. 22, 28	
1955 HL	55 Avr. 19	19.688	185.739	52.369	0.20252	2.8719	Avr. 18, 19	
1955 QJ	55 Sept. 13	153.536	176.209	17.732	0.16385	3.3075	Août 23, Sept. 19	
1955 QK	55 Sept. 13	145.309	184.336	12.811	0.18970	3.0000	Août 23, Sept. 19	
1955 QL	55 Sept. 13	70.142	259.700	7.818	0.17552	3.1592	Août 23, Sept. 19	
1955 SO	55 Sept. 28	142.848	217.843	9.809	0.18755	3.0227	Sept. 17, Oct. 10	
1955 TR	55 Oct. 10	148.897	348.076	6.886	0.22043	2.7140	Oct. 9, 11	7)
1955 TT	55 Oct. 15	12.961	6.969	21.561	0.20550	2.8440	Oct. 11, 18	
1956 EN	56 Mars 17	55.165	116.876	8.681	0.27170	2.3605	Mars 10, 17	
1956 EO	56 Mars 17	79.386	91.359	10.255	0.18643	3.0344	Mars 10, 17	
1956 EP	56 Mars 17	56.405	115.093	11.367	0.19049	2.9900	Mars 10, 17	

1) 1950 DN = 1934 SA ?

2) 1951 RE = 1938 DW ?

3) 1954 RA = 1938 GM ?

4) 1954 TB = 1933 UO

5) 1954 UD = 1949 JE ? $\neq$ 1949 KH6) 1955 GA = 1939 FK $\neq$ 1931 TT₁7) 1955 TR $\neq$ 1937 TN

PLIPRECIZIGOJ DE ELTROVATAJ RAPIDOJ DE PLANEDETOJ

de B. POPOVIĆ (Sarajevo)

Suncentra pozicio de planedeto estas trovata el la tercentraj, respektive lokocentraj, pozicioj, kaj ĉi tiuj estas determinataj per mezurado ĉe la observoloko. Por metodoj de Gauss-tipo ĉi tio sufiĉas. Sed ĉe metodoj de Laplace-(kaj de Lagrange-) tipo oni agas ankaŭ kun derivado de la pozicidirekto aŭ, kiel oni kutime nomas ĝin, kun la tagmoviĝo. Tiun moviĝon oni trovas el du aŭ pli de mezuritaj pozicioj. Por ke jam la unuaj solvoj por la orbito estu plejeble precizaj, oni bezonas trovi la derivojn kiom eble pli precize. Ĉi tio gravas precipe kiam la ekagaj donoj malriĉas, pro kio oni devas ĉe orbitalkalkulo eltiri maksimumon (kiel ekz. okazas ĉe kalkulado de la elementoj el du pozicioj kaj la tagmoviĝo, por kio estas preparita por presigo metodo de la aŭtoro).

Ĉe trovado de rapidoj el donitaj lokocentraj pozicioj aperas du problemoj: eliminado de la paralaksinfluo kaj plietigo de la neglektitaj supergradaj membroj. La kutima, vere simpla, procedo (uzado de tercentra pozicivektoro de observanto, $-\Delta\mathbf{R}$) malofte sufiĉas por elimini la paralaksinfluan. Leuschner [4] donis la procedon per kiu oni fakte en kontentiga grado eliminis ĝin (ĵus pro kio lia apliko de la Laplace-metodo donas plej ĝustajn unuajn solvojn). Sed la procedo uzas sferajn koordinatojn α, δ , pro kio ĝi estas tro komplika, kaj krome ĝi ne estas ĝenerale uzebla, ĉar ĝi estas adaptita kiel kunparto de lia orbitdetermina metodo. Kio koncernas la neglekton de superaj membroj ni havas ĉe Leuschner, kiel ankaŭ ĉe aliaj, la lokocentrajn seriojn, kio multmezure pligrandigas valoron de la neglektitaj membroj.

Pro tio en ĉi tiu verketo mi okupiĝos pri analizo de kelkaj demandoj, kies korekta solvo kondukas al iu simpla pligrandigo de precizeco en orbitteorio, kiam oni bezonas trovi rapidon kaj akcelon. Ĉefan rolon ĉe ĉi tiu havas utiligo de la vektoro (6), kiu de baricentro (aŭ de la tercentro) iras normale al la observodirekto de planedeto. Ĉi tiu vektoro ebligis trakti kune la problemon de eliminado de paralaksinfluo kaj la problemon de grandeco de malzorgitaj membroj, kaj tiel oni ne nur kontentige eliminis la paralaksinfluan, sed ankaŭ la neglektitaj membroj fariĝas multe pli etaj (ĉar mi seriigas nur kvantojn rilatantaj la baricentron, pro kio la serioj konverĝas pli rapide kaj en pli vastaj intervaloj).

En la unua parto mi donos novan rilaton inter baricentra (aŭ tercentra) kaj lokocentra unuovektoro de planedeto. Poste mi aplikos la rilaton al okazoj: de du proksimaj observoj (kun analizo de

neglektitaj membroj kaj de influo de la observaj eraroj), de du observoj en iom pli longa tempointervalo, de tri observoj (kun analizo de neglektitaj membroj kaj serĉo de plej taŭga ekaga — baza — momento). Fine mi pritraktas la okazon de pli ol tri observoj — kun esploro de utileco de ilia uzo tuj ĉe eltrovo de la unua provizora solvo por la planedetorbito.

Dum la ekspozado mi konsekvence uzos vektoran skribformon ĉie kie oni kontaktas kun vektoroj.

1) RILATO INTER BARICENTRAKAJ LOKOCENTRA DIREKTOJ

Por distingi lokocentrajn poziciojn de la baricentraj kaj de la tercentraj ni uzu superajn apudsignojn l, b, t — tie kie oni ne tuj vidas pri kia pozicio temas. Pozicion kaj rapidon de Suno (rilate la Teron) ni signos per vektoroj $\mathbf{R}$ kaj $\mathbf{V}$, dum ρ kaj $\mathbf{e}$ signifos la distancon kaj unuovektoron de planedeto — denove rilate la Teron. Tiam por la suncentra pozicio kaj rapido de planedeto ni havos

$$(1) \mathbf{r} = -\mathbf{R}^l + \rho^l \mathbf{e}^l = -\mathbf{R}^b + \rho^b \mathbf{e}^b = -\mathbf{R}^t + \rho^t \mathbf{e}^t,$$

$$(2) \mathbf{v} = -\mathbf{V}^l + (\rho^l \mathbf{e}^l)' = -\mathbf{V}^b + (\rho^b \mathbf{e}^b)' = -\mathbf{V}^t + (\rho^t \mathbf{e}^t)'$$

Se ni signos per $\Delta'\mathbf{R}$ la vektoron kiu kunigas la lokon de la observanto kun la momenta loko de baricentro, t.e. se ni metos

$$(3) \Delta'\mathbf{R} = \mathbf{R}^l - \mathbf{R}^b,$$

la rilato inter baricentra kaj lokocentra pozicioj estos

$$(4) \rho^b \mathbf{e}^b = -\Delta'\mathbf{R} + \rho^l \mathbf{e}^l.$$

Oni povas facile vidi ke $|\Delta'\mathbf{R}|$ malofte, kaj relative malmulte, povas superigi $6 \cdot 10^{-5}$, kaj ĝian kvadraton oni povas libere malzorgi, pro kio ni ricevos

$$(\rho^b)^2 = (\rho^l)^2 - 2\rho^l(\mathbf{e}^l, \Delta'\mathbf{R}),$$

respektive

$$(5) \rho^b = \rho^l - (\mathbf{e}^l, \Delta'\mathbf{R}).$$

Plue el la egalaĵo (4), utiligante la lastan rezultaton aŭ farante dufoje la vektoran produkton per $\mathbf{e}^l$, oni ricevas

$$\rho^b \mathbf{e}^b = \rho^b \mathbf{e}^l + \mathbf{e}^l(\mathbf{e}^l, \Delta'\mathbf{R}) - \Delta'\mathbf{R},$$

$$\mathbf{e}^b = \mathbf{e}^l + \mathbf{e}^l(\mathbf{e}^l, \frac{\Delta'\mathbf{R}}{\rho^b}) - \frac{\Delta'\mathbf{R}}{\rho^b}.$$

Signu ni ankoraŭ

$$(6) \quad \mathbf{b} = \Delta' \mathbf{R} - \mathbf{e}' (\mathbf{e}' \Delta' \mathbf{R}) = -[\mathbf{e}' [\mathbf{e}' \Delta' \mathbf{R}]] = \\ = [\mathbf{e}' [\mathbf{e}', \mathbf{R}^b - \mathbf{R}^l]] ,$$

kaj ni havos simplan rilaton

$$(7) \quad \mathbf{e}^b = \mathbf{e}' - \frac{\mathbf{b}}{\rho} ,$$

ĉe kio en la denominatoro (ĉar la numeratoro estas de grandeco 10^{-5}) ni malzorgas la diversecon inter lokocentra kaj baricentra distancoj.

Oni havos tute la samon ankaŭ se oni pere de $\mathbf{e}'$ esprimos la tercentran unuovektoron; nur en $\Delta' \mathbf{R}$ estos $\mathbf{R}^b$ anstataŭ $\mathbf{R}^l$, t. e. $\Delta' \mathbf{R}$ havos la signifon de la kutima vektoro $\Delta \mathbf{R}$ (kiu kunigas la observanton kun la tercentro).

Se oni disvolvas la esprimojn el la ekvacio (7) en Taylor-seriojn, oni povus tuj konstati:

1) La serio por $\mathbf{e}^b$ havos la praktikan konverĝintervalon ĉirkaŭ $\pm$ duono de jaro, kaj por malgrandaj tempointervaloj ĝi tre rapide konverĝos (ĉe ni malzorgu negravajn deviojn de la baricentro Tero-Luno de la meza elipso ĉirkaŭ Suno, ĉar la devioj estas pli etaj ol 10^{-8}).

2) La vektoreto $\mathbf{b}$ ŝanĝiĝas preskaŭperiode, kun periodo de unu Luna turno ĉirkaŭ la Tero (resp. ĉirkaŭ la observanto). Pro tio la serio devenanta de $\mathbf{b}$ konverĝos praktike nur en intervalo ege malpli ol 12 horoj.

El ĉi tiuj konstatoj sekvas ke ankaŭ la serio por la unuovektoro $\mathbf{e}'$ povas havi la uzeblan konverĝintervalon nur malpli ol 12 horoj, pro kio ĉi tiu seriigo estas permesata nur en mallongaj tempointervaloj — do oni rajras neglekti la superajn membrojn nur en okazo de tre proksimaj observoj (maksimume 2—3 horoj). Se oni uzas la seriojn en pli longaj tempointervaloj, la rezultatoj povas esti nur proksimumaj — same kiel ni estus neglektintaj la influon de la tagparalakso. Pro tio oni evitados en ĉi tiu verketo la seriigon de lokocentraj kvantoj.

2) OKAZO DE DU PROKSIMAJ OBSERVOJ

Por trovi plej rigoran vojon por kalkulado de unu pozicio el konataj du proksimaj observoj, ni ekiros de la serioj

$$(8) \quad \begin{cases} \rho_2 \mathbf{e}_2 = \rho \mathbf{e} + \tau (\rho \mathbf{e})' + \frac{\tau^2}{2} (\rho \mathbf{e})'' + \dots \\ \rho_1 \mathbf{e}_1 = \rho \mathbf{e} - \tau (\rho \mathbf{e})' + \frac{\tau^2}{2} (\rho \mathbf{e})'' - \dots \end{cases}$$

kaj ni kombinos ilin kun la serioj

$$(9) \quad \begin{cases} \rho_2 = \rho + \tau \rho' + \frac{\tau^2}{2} \rho'' + \frac{\tau^3}{3!} \rho''' + \dots \\ \rho_1 = \rho - \tau \rho' + \frac{\tau^2}{2} \rho'' - \frac{\tau^3}{3!} \rho''' + \dots \end{cases}$$

ĉe τ estas duono de la tempointervalo inter du observoj, respektive inter komenco kaj fino de la observo. La serioj estas uzeblaj, same kiel supre, en la intervalo malpli longa ol duontago, duonmonato kaj duonjaro — laŭ tio kiaj estas la kvantoj: lokocentraj, tercentraj aŭ baricentraj. Por ĉi tiu okazo sufiĉas uzi la tercentrajn poziciojn, ĉar ni laboros kun mallongaj tempointervaloj.

Anstataŭigu la tercentrajn esprimojn, maldekstraflanke en la supraj ekvacioj, per la korespondaj lokocentraj esprimoj — $\Delta \mathbf{R}_i + \rho_i^l \mathbf{e}_i^l$, resp. $\rho_i^l - (\mathbf{e} \Delta \mathbf{R})_i$. Tiam el (8) oni ricevas

$$\begin{aligned} & - \frac{\Delta \mathbf{R}_2 + \Delta \mathbf{R}_1}{2} + \frac{\rho_2^l \mathbf{e}_2^l + \rho_1^l \mathbf{e}_1^l}{2} = \\ & = \rho \mathbf{e} + \frac{\tau^2}{2} (\rho \mathbf{e})'' + \dots \\ & - \frac{\Delta \mathbf{R}_2 - \Delta \mathbf{R}_1}{2} + \frac{\rho_2^l \mathbf{e}_2^l - \rho_1^l \mathbf{e}_1^l}{2} = \\ & = \tau (\rho \mathbf{e})' + \frac{\tau^3}{3!} (\rho \mathbf{e})''' + \dots \end{aligned}$$

Kaj la seriojn (9) ni unue multipliku per $\mathbf{e}_2^l$ kaj $\mathbf{e}_1^l$ kaj sammaniere oni ricevas

$$\begin{aligned} & - \frac{\mathbf{e}_2^l (\mathbf{e} \Delta \mathbf{R})_2 + \mathbf{e}_1^l (\mathbf{e} \Delta \mathbf{R})_1}{2} + \frac{\rho_2^l \mathbf{e}_2^l + \rho_1^l \mathbf{e}_1^l}{2} = \\ & = \left(\rho + \frac{\tau^2}{2} \rho'' + \dots \right) \frac{\mathbf{e}_2^l + \mathbf{e}_1^l}{2} + \\ & + \left(\tau \rho' + \frac{\tau^3}{3!} \rho''' + \dots \right) \frac{\mathbf{e}_2^l - \mathbf{e}_1^l}{2}, \\ & - \frac{\mathbf{e}_2^l (\mathbf{e} \Delta \mathbf{R})_2 - \mathbf{e}_1^l (\mathbf{e} \Delta \mathbf{R})_1}{2} + \frac{\rho_2^l \mathbf{e}_2^l - \rho_1^l \mathbf{e}_1^l}{2} = \\ & = \left(\rho + \frac{\tau^2}{2} \rho'' + \dots \right) \frac{\mathbf{e}_2^l - \mathbf{e}_1^l}{2} + \\ & + \left(\tau \rho' + \frac{\tau^3}{3!} \rho''' + \dots \right) \frac{\mathbf{e}_2^l + \mathbf{e}_1^l}{2}. \end{aligned}$$

Per subtraho de la antaŭaj ekvacioj, se ni ĉe utiligas la signaĵon (6), same kiel — pro mallonga skribo — la signaĵojn

$$(10) \quad (\mathbf{e}_2^l + \mathbf{e}_1^l) : 2 = \mathbf{e}^l$$

$$(11) \quad (\mathbf{e}_2^l - \mathbf{e}_1^l) : 2\tau = (\mathbf{e}^l)'$$

ni ricevos

3) GRANDECO DE NEGLEKTITAJ MEMBROJ ĈE DU OBSERVOJ

Avantaĝon de la formo (13) koncerne la evitadon de senbezonaĵoj neglektoj ni vidis en tio ke la dua derivado de pozicia unuovektoro en la unua neglektita membro estis ĉefparte tercentra, kaj ne lokocentra. Ĉee oni konsideras la vektoretojn $\mathbf{b}$ en ambaŭ eksteraj pozicioj. Por vidi kiom da neglekto oni tie evitis, anstataŭigu ρ — dekstraflanke en (13) — per ĝia lokocentra valoro (5). Oni havos

$$\begin{aligned} -\mathbf{R} + \rho \mathbf{e} &= -\mathbf{R} + \rho' \mathbf{e}' - \mathbf{e}' (\mathbf{e} \Delta \mathbf{R}) - \\ &= -(\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1) : 2 = -\mathbf{R} - \Delta \mathbf{R} + \rho' \mathbf{e}' - \\ &\quad - \left(\frac{\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1}{2} - \mathbf{b} \right). \end{aligned}$$

Diferenco inter la esprimo el la unua ekvacio (13) kaj la kutima troviĝas parenteze. La diferenco valoras

$$\frac{\tau^2}{2} \mathbf{b}'' + \frac{\tau^3}{6} \mathbf{b}''' + \dots,$$

kaj ĉar $\mathbf{e}$ ŝanĝiĝas tre malrapide kompare kun $\Delta \mathbf{R}$, neglektinte la lastan esprimon ni fakte forĵetas proksimume kvanton

$$\frac{\tau^2}{2} \left[\mathbf{e} [\mathbf{e} (\Delta \mathbf{R})'] \right].$$

Ni scias ke

$$(15) \quad \begin{cases} \Delta \mathbf{R} = C' \cos \theta \mathbf{i} + C' \sin \theta \mathbf{j} + C' \mathbf{k}, \\ (\Delta \mathbf{R})' = -2\pi C' \sin \theta \mathbf{i} + 2\pi C' \cos \theta \mathbf{j}, \\ (\Delta \mathbf{R})'' = -4\pi^2 C' \cos \theta \mathbf{i} - 4\pi^2 C' \sin \theta \mathbf{j}, \end{cases}$$

kie θ estas la loka steltempo, kaj la tempounuo estas tago. Pro tio, se ni deziras ke la neglektaĵo ne transiru $2 \cdot 10^{-7}$, oni devas esti

$$(16) \quad \frac{\tau^2}{2} \cdot 4\pi^2 \cdot |C'| \leq 2 \cdot 10^{-7}.$$

$|C'|$ proksimumas $3 \cdot 10^{-5}$, kaj sekve devas esti

$$|\tau| \leq \frac{1}{10\pi \cdot \sqrt{3}} \sim \frac{1}{50} \text{ de tago.}$$

Tio montras ke pozicion de planedeto ni rajtas determini per du proksimaj lokocentraĵoj pozicioj, kun certa ĝusteco de $2 \cdot 10^{-7}$, nur se la intervalo inter komenco kaj fino de la observo estas pli eta ol unu horokontraŭe la eraro povas eliri ekster antaŭviditaj precizeclimoj. Sed tio ne nepras esti, tial ĉar oni devas ankoraŭ multipliki $(\Delta \mathbf{R})''$ vektore per $\mathbf{e}$, kaj grandeco de la produkto povas esti multe pli malgranda ol $(\Delta \mathbf{R})''$, ĉar $(\Delta \mathbf{R})''$ iras de la observinto normale al Tera rotaciakso, kaj $\mathbf{e}$ preskaŭ ĉiam proksimas la ekvatoron kaj la meridianon.

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{e} &= -\frac{\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1}{2} - \left[\frac{\tau^2}{2} (\rho \mathbf{e})'' + \dots \right] + \rho \mathbf{e}' + \\ &+ \frac{\tau^2}{2} \left[\rho'' \mathbf{e}' + 2\rho' (\mathbf{e}')' \right] + \dots = -\frac{\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1}{2} + \\ &+ \rho \mathbf{e}' - \frac{\tau^2}{2} \left[\rho \mathbf{e}'' - \rho'' \frac{\mathbf{b}}{\rho} - 2\rho' \left(\frac{\mathbf{b}}{\rho} \right)' \right] + \dots \\ \tau (\rho \mathbf{e})' &= -\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1}{2} - \left[\frac{\tau^3}{6} (\rho \mathbf{e})''' + \dots \right] + \\ &+ \tau \rho (\mathbf{e}')' + \tau \rho' \mathbf{e}' + \frac{\tau^3}{6} \left[\rho''' \mathbf{e}' + 3\rho'' (\mathbf{e}')' \right] + \\ &+ \dots = -\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1}{2} + \tau \left\{ \rho (\mathbf{e}')' + \rho' \mathbf{e}' - \right. \\ &\left. \frac{\tau^2}{6} \left[3\rho' \mathbf{e}'' + \rho \mathbf{e}''' - \rho''' \frac{\mathbf{b}}{\rho} - 3\rho'' \left(\frac{\mathbf{b}}{\rho} \right)' \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Ni estas devigataj neglekti la membrojn kun τ^2 , sed ĉi tie ni facile rajtas fari tion, ĉar en ili kiel ĉefparto troviĝas (nekonataj) tercentraj dua kaj tria derivoj — kaj ne la lokocentraĵoj. Tiel ni havos

$$(12) \quad \begin{cases} \rho \mathbf{e} = \rho' \mathbf{e}' - (\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1) : 2, \\ \rho' \mathbf{e} + \rho \mathbf{e}' = \rho' \mathbf{e}' + \rho (\mathbf{e}')' - (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) : 2\tau, \end{cases}$$

de kie por la suncentra pozicioj kaj rapido oni havas

$$(13) \quad \begin{cases} \mathbf{r} = -\mathbf{R} - (\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_1) : 2 + \rho \mathbf{e}', \\ \mathbf{v} = -\mathbf{V} - (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) : (t_2 - t_1) + \rho' \mathbf{e}' + \rho (\mathbf{e}')'. \end{cases}$$

Per ĉi tio oni akiris tute novajn esprimojn por korektaĵoj $\delta \mathbf{R}$, $\delta \mathbf{R}'$, kiujn en la ekvacioj

$$(14) \quad \begin{cases} \mathbf{r} = -\mathbf{R}' - \delta \mathbf{R} + \rho' \mathbf{e}', \\ \mathbf{v} = -\mathbf{V}' - \delta \mathbf{R}' + \rho' (\mathbf{e}')' + (\rho')' \mathbf{e}', \end{cases}$$

oni devas adicii al tercentraj pozicio kaj rapido de Suno por elimini influon de la lokocentra pozicio de observinto, t. e. tagparalakson, ĉee malzorgante la duan kaj trian gradon de unu serio kiu en etaj tempintervaloj tre rapide konverĝas (dume la serio kun la lokocentraĵoj donoj konverĝas malrapide). Esencan rolon en ĉi tiuj esprimoj havas la vektoreto (6), kiu fakte estas normalo (kontraŭdirekta) iranta de la tercentro (en aliaj okazoj de la bari-centro) al la observodirekto, kion oni vidas aŭ el la signifo de la vektorprodukto (6), aŭ el la disvolvita formo $\Delta \mathbf{R} - \mathbf{e} (\mathbf{e} \Delta \mathbf{R})$. Avantaĝo de la formo (13) super la kutima uzo de $\Delta \mathbf{R}$ evidentiĝas ankaŭ ĉe orbitalkalkulado el observoj faritaj diversloke. Nome adiciante $\Delta \mathbf{R}$ ni havas kiel nekonaton en la ekvacioj (14) la lokocentran distancan, kiu diversas por diversaj observlokoj. Sed en la ekvacioj (13) nekonato estas la tercentra distanco, kaj tiamaniere oni povas ĉiujn observojn redukti al la tercentro.

Tamen gravas ke en kelkaj okazoj ne konsentita eraro povas ekesti. Konsiderante ĉi tiun rimarkon, la permesatan intervalon inter komenco kaj fino de la observo oni povas pligrandigi iom trans unu horo (por observoj proksimaj al ĉielekvatoro kaj ne malproksime de meridianebeno), por ke la eltirita kvanto $\mathbf{e}$, aplikante (14) kutimmaniere, ne deflankiĝu pli ol $2 \cdot 10^{-7}$.

Tuj kiam la observintervalo estas pli granda, aŭ kiam oni postulas la precizecon pli ol $2 \cdot 10^{-7}$ (kio nepre venos kun evoluo de observotekniko), ni devos utiligi la ekvaciojn (13), kie la eraro devenas nur de neglekto de $\mathbf{e}''$. Se oni konsideras ke $|\mathbf{e}''|$ preskaŭ neniam transiras 10^{-4} (escepte la haltigon de planeteto), montriĝas ke oni povas ĉi

tie preni τ ĝis $\sqrt{4 \cdot 10^{-3}} \sim \frac{1}{16}$ de tago, t. e. temp-intervalo inter komenco kaj fino de la observo povas esti almenaŭ ĝis tri horoj, ke la apliko de la unua ekvacio (12) tamen ne efiku la eraron pli grandan ol $2 \cdot 10^{-7}$.

Diferenco inter la esprimo en la dua ekvacio (13) kaj la kutima kalkulo el (14), pro (5) estos

$$\begin{aligned} (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) : 2 - (\Delta \mathbf{R})' \cdot \mathbf{e}^l + (\mathbf{e} \Delta \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{e}^l)' &= \\ = \mathbf{b}' + \frac{\tau^2}{3!} \mathbf{b}''' + \dots + [\mathbf{e}[\mathbf{e} \Delta \mathbf{R}]]' & \\ \sim \frac{\tau^2}{6} [\mathbf{e}[\mathbf{e}(\Delta \mathbf{R})''']] &. \end{aligned}$$

Do la neglektoj povas esti ĝis

$$(17) \quad \frac{\tau^2}{6} (2\pi)^3 \cdot |C'| \sim \frac{\tau^2}{800}.$$

Jam por $\tau = \frac{1}{2}$ de horo, t. e. ĉe unuhora ob-

servo, ĉi tiu esprimo proksimumvaloras $5 \cdot 10^{-7}$, kaj tio ne estas malzorginda kvanto. La rimarko pri plietigo de la neglekto pro vektora multipliko per $\mathbf{e}$ ĉi tie ne valoras, ĉar $(\Delta \mathbf{R})'''$ troviĝas en la ekvatorebena normale al meridianebeno, tiel ke ĝi dum kutimaj observoj estas preskaŭ orta kun $\mathbf{e}$.

Pro tio ja eltrovado de la tagmoviĝo el du proksimaj observoj estas permesata nur kun tre mallongaj tempintervaloj (observdaŭro ĝis maksimume unu horo) — se al la tercentra sunrapido oni aldonas la derivon de $\Delta \mathbf{R}$. Tuj kiam la tempintervalo estas pli longa, necesas apliki la duan ekvacion (12), resp. (13). Pro tio oni devus ĉie apliki la manieron de publikigado de precizaj observodonoj por planetetoj kiam oni dum lastaj jaroj praktikas ekz. ĉe la observejo *Goethe Link*, t. e. ne donadi la eltrovitajn tagmoviĝojn, sed du proksimajn observojn (el kiuj oni povas laŭbezone eltiri la tagmoviĝojn). Tiel oni povos per apliko de la ekvacioj (13) akiri pli precizajn kvantojn por suncentra pozicio kaj

rapido de planeteto. Observintoj kiuj mem eltiris mezan pozicion kaj (precizan) tagmoviĝon el du pozicioj kun la tempintervalo pli longa ol unu horo, ili devus donadi ankaŭ la donojn pri vektoretoj $\mathbf{b}_1$

kaj $\mathbf{b}_2$, aŭ $\frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2)$ kaj $\frac{\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1}{t_2 - t_1}$ (aŭ almenaŭ la observodaŭron) — anstataŭ logaritmo-faktoron de la paralakso.

4) INFLUO DE LA OBSERVAJ ERAROJ

En la supra analizo oni ne konsideris influon de la observaj eraroj, kaj ili estas ankoraŭ tiomaj ke ili grandmezure malpliigas la avantaĝon de la novaj esprimoj antaŭ la malnovaj. Sed pliprecizigo de la observoj igos necesa utiligon de la esprimoj (13).

Eltrovado de la meza pozicio estas pli preciza se la tempintervalo estas malpli longa, ĉar plejmalbonŝance oni retenas pli grandan observan eraron senkonsidere la tempintervalon, kaj la neglektitaj membroj estas pli etaj se la intervalo estas pli eta. Sed ĉe la unua derivado, pro neglektitaj membroj estas pli bone ke la intervalo estu kiom eble pli mallonga, kaj pro observaj eraroj estas bone ke ĝi estu kiom eble pli daŭra (ĉar per ĝi oni dividas diferencon inter la observaj donoj). Tiam stariĝas demando: kiu intervalo estas plej taŭga kaj kiam precizecon oni tiam atingas?

Se oni prenas ke la observa eraro estas $3 \cdot 10^{-7}$, kio korespondas al la precizeco de proksimume $0^\circ.005$, resp. $0''.05$, kaj se oni kutime utiligas la ekvaciojn (14), tiam per egaligo de la influo pro neglekto (17) kun influo pro la observa eraro, oni konstatas ke por plej taŭga intervalo devas esti proksimume

$$\frac{6 \cdot 10^{-7}}{2\tau} = \frac{\tau^2}{800},$$

t. e. $\tau \sim 0.06$. Tiam $\mathbf{e}'$ estos eltrovita kun la precizeco ĝis $5 \cdot 10^{-6}$, kaj la esprimo (16) kun ĉi tiu tempintervalo donas deflankiĝojn de $\mathbf{e}$ ĝis $5 \cdot 10^{-7}$. Per formuloj (14) kaj (15) oni ne povas atingi pli grandan precizecon, kaj ĉi tiaj deflankiĝoj tamen ne estas malzorgindaj. Iom pli grandan precizecon, ankaŭ eblecon manovri inter la precizecoj de $\mathbf{e}$ kaj de $\mathbf{e}'$, eĉ apud la nunaj observaj eraroj, donas la formuloj (13).

Ni jam esploris la neglektitan membron en la unua el la formuloj, kaj en la dua la neglektita

membro estas $\frac{\tau^2}{2} \cdot \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{e}''$; ĝia valoro — por preskaŭ

ĉiam plenumita $\left| \frac{\rho'}{\rho} \mathbf{e}'' \right| \leq 5 \cdot 10^{-5}$ kaj por $\tau = 0.06$

— estas pli eta ol 10^{-7} . Tio montras ke, kun utiligo de la dua ekvacio (13), oni rajtas uzi ankaŭ pli daŭrajn tempintervalojn ol $2\tau = 0.12$. Plej taŭga

okazo estos se la ĵus traktita eraro (pro neglekto) proksimume egalus la influon de la observa eraro, t. e.

$$\frac{\tau^2}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-5} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2\tau}.$$

Do, plej taŭgas $\tau = 1/4$ de tago. Sed tioma intervalo grave plietigus precizecon de $\mathbf{e}$ (krome oni ne observadas dum tiom daŭra intervalo); pro tio oni devas serĉi iom malpli larĝan intervalon, tian ke la deflan-kiĝoj kaj de $\mathbf{e}$ kaj de $\mathbf{e}'$ estu kiom eble pli etaj. Ni trovos ĝin komparinte la unuan neglektitan membron ĉe $\mathbf{e}$ kaj pli grandan eraron ĉe $\mathbf{e}'$, t. e.

$$\frac{\tau^2}{2} \cdot 10^{-4} = \frac{6 \cdot 10^{-7}}{2\tau}.$$

De ĉi tie ni tuj havas $\tau \sim \frac{9}{50}$ de tago, kiam oni ĉe

$\mathbf{e}$ kaj $\mathbf{e}'$ atingas precizecon $16 \cdot 10^{-7}$.

Resumu la solvon de la starigita demando pri plej taŭga observintervalo, enprenante tutan eblan eraron: kaj de la neglektitaj membroj kaj de observoj. Se oni eliminis influon de tagparalakso rekte per $\Delta \mathbf{R}$, tiam plej taŭgas observintervalo de 0.12 de tago, kiam oni ĉe $\mathbf{e}$ atingas precizecon $5 \cdot 10^{-7}$, respektive $50 \cdot 10^{-7}$ ĉe $\mathbf{e}'$. Kaj se oni aplikas la ekvaciojn (13), plej konvena estas intervalo de 0.36 de tago, kiam la atingita precizeco estas $16 \cdot 10^{-7}$ kaj ĉe $\mathbf{e}$ kaj ĉe $\mathbf{e}'$. En la unua okazo oni ne povas plu pligrandigi la precizecon (fakte oni povas tion ĉe $\mathbf{e}$, sed tiam estus ankoraŭ pli eta, jam tre eta, precizeco ĉe $\mathbf{e}'$). En la dua okazo oni povas pligrandigi precizecon de $\mathbf{e}$ je manko de tiu ĉe $\mathbf{e}'$, kaj inverse. Ĉe $\mathbf{e}$ oni havas

$$|\varepsilon| \leq \frac{\tau^2}{2} \cdot 10^{-4} \text{ kaj ĉe } \mathbf{e}' \text{ oni havas } |\varepsilon| \leq \frac{3}{\tau} \cdot 10^{-7},$$

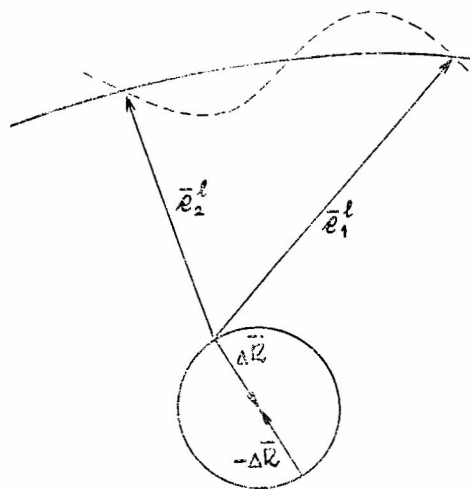
tiel ke ekz. jam por $\tau = 0.09$ de tago oni havas $|\varepsilon(\mathbf{e})| \leq 4 \cdot 10^{-7}$, $|\varepsilon(\mathbf{e}')| \leq 32 \cdot 10^{-7}$, do pli precize kaj ĉe $\mathbf{e}$ kaj ĉe $\mathbf{e}'$ ol tio estis en la unua okazo. Pliprecizigo de observoj ankoraŭ pli favorigos la ekvaciojn (13), ĉar ĉe $\mathbf{e}'$ la efektiva eraro estas multe malpli granda ol la influo de observaj eraroj (nuntempaj).

5) ELTROVADO DE TAGMOVIĜO ĈE PLI DAŬRAJ INTERVALOJ

Ni vidis ke la formuloj (12) aŭ (13) havas des pli da avantaĝo super kutima procedo por elimini la tagparalakson ju pli daŭras la tempintervalo inter komenco kaj fino de la observo (resp. inter du observoj). Estas precipe interesa ofta okazo kiam de unu ĝis alia observo pasis unu tago, kaj la pliajn observojn oni ne disponas. Tie ne utilas la tipa (de *Veithen*) metodo por determino de cirklaĵ orbitoj, ĉar la observoj tro proksimas. Kaj por redukto al unu meza observo kun eltrovita tagmoviĝo, la intervalo estas tro granda, kaj la serioj por lokocentra

moviĝo estus neuzeblaj. Tial ni apliku simplan rezonadon al ĉi tiu okazo, ekde tercentra starpunkto.

Pozicio de la observanto ŝanĝiĝas dum unu tago rilate al la komenca direkto $\Delta \mathbf{R}$ en kiu la observanto unue troviĝis. Post unu tago la observanto troviĝos en la sama loko, sed la objekto ŝanĝis la direkton de $\mathbf{e}_1^l$ al $\mathbf{e}_2^l$. Meze de observintervalo en la sama punkto troviĝis iu alia observanto, kiu vidis



la objekton proksimume en direkto $\frac{1}{2} (\mathbf{e}_1^l + \mathbf{e}_2^l)$. Do

en tiu momento estis

$$(18) \quad \mathbf{r} = -\mathbf{R} - \Delta \mathbf{R} + \rho^l \cdot (\mathbf{e}_1^l + \mathbf{e}_2^l) : 2,$$

ĉe kio $\Delta \mathbf{R}$ ne signifas pozicion de nia observanto en la meza momento (kiu pozicio ĝuste kontraŭdirektus al ĉi tiu), sed pozicion de unu fiktiva observanto kiu dum la tuta objektmoviĝo troviĝus en la sama spacpunkto en kiu estis nia observanto en ambaŭ observmomentoj. Se ni estus aplikintaj la formulon (14), kun la kutima $\mathbf{R}$ -korekto por la mezo de la observintervalo, ni ricevus

$$\mathbf{r} = -\mathbf{R} + \Delta \mathbf{R} + \rho^l (\mathbf{e}_1^l + \mathbf{e}_2^l) : 2,$$

kio estas evidente erara. Kaj la unua ekvacio (13) donas ĝuste la esprimon (18).

En la rapideltrovo ĉiokaze tute forfalas la observantomoviĝo, ĉar la bildo estus tute la sama se li entute ne ekmoviĝus (kun la Tero), ĉar li venis en la saman punkton. Pro tio estus erare apliki ĉi tie la korektaĵon (15) por $\mathbf{V}$, sed oni devas tute forĵeti ĝin. Tion ĝuste diras ankaŭ la dua ekvacio (13). Eĉ pli, ĉi tiuj ekvacioj ebligas esprimi ĝuste la suncentran pozicion kaj rapidon (de la observita objekto, en la meza momento) ankaŭ tiam kiam la tempintervalo estas nur proksimume unutaga.

Do la formuloj (13) estas ne nur pli precizaj, sed ankaŭ multe pli ĝeneralaj ol la formuloj (14) kun la kutima $\Delta \mathbf{R}$. Tio devenas de la fakto ke ili konsi-

deras etajn oscilaĵojn kiujn faras dumtage la orbito de la observoloko ĉirkaŭ la tercentra orbito (en la bildo punktitaj), pro kiuj la rektlinia interpolo laŭ lokocentra orbito kondukas al etaj deflankiĝoj en la pozicioj, kaj ja al pli grandaj deflankiĝoj kiam temas pri la tangento en la moviĝdirekto. La neglektoj estas nepermesindaj, kion oni bone vidas ankaŭ el jena ekzemplo. Por la planetetoj 1933 *QE* kaj 1940 *RE* la aŭtoro kalkulis cirklaĵajn elementojn el du observoj kun unutaga intervalo kaj ĉee korekte forĵetis **V** — korekton, kaj rilate la **R** — korekton unufoje uzis la mezan momenton kaj aliffoje ambaŭ limmomentojn laŭ la formulo (13). La trovitaj suncentraj distancoj diferencas ĉ. 0.01; la diferencoj en situigo de la orbitebeno estus sendube ankoraŭ pli grandaj se oni aplikus la rapidkorekton (14).

El dutaga (tiom pli el plitaga) intervalo estas netaŭge eltiri la tagmoviĝon, eĉ kun apliko de la formuloj (13), ĉar valoro de la neglektitaj membroj povas iam influi eĉ la kvaran decimalon de **e**. Se oni tamen bezonas, pro io ajn, nepre eltiri la tagmoviĝon, tiam oni devas apliki la formulojn (13) kun uzo de baricentro, t. e. de la baricentraj kvantoj **R**, **V**, ρ , kaj same oni devas krei **b_i** pere de la vektoro kiu iras de la observanto al la baricentro (la parton de la tercentro al la baricentro oni facile trovas pere de Lunefemeridoj). Tiel oni havos iom pli da kalkulo, sed la neglektitaj membroj estos grave pli etaj, ĉar en ili anstataŭ tercentra troviĝos baricentra **e''**, kaj **e** ŝanĝiĝas multe pli malrapide (ĝuste dirita pli regule) rilate al baricentro ol rilate al tercentro.

6) LA PROCEDO EN LA OKAZO DE TRI OBSERVOJ

En okazo de tri aŭ pluraj observoj oni kutime reduktas la lokocentrarn koordinatojn al tercentraj (aŭ baricentraj) nur post kiam oni eksciis la unuan proksimuman valoron por la planetetdistanco. Sed tio ne necesas, ĉar oni povas en la formuloj tuj konsideri la paralakson.

Ekiru de la ekvacioj (8) kaj (9) por la elektita momento t kaj la observomomentoj t_i ($i = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{R}_i + \rho_i^l \mathbf{e}_i^l &= \rho_i \mathbf{e}_i = \rho \mathbf{e} + \tau_i (\rho \mathbf{e})' + \\ &+ \frac{\tau_i^2}{2} (\rho \mathbf{e})'' + \dots \\ -(\mathbf{e} \Delta \mathbf{R})_i + \rho_i^l &= \rho_i = \rho + \tau_i \rho' + \\ &+ \frac{\tau_i^2}{2} \rho'' + \frac{\tau_i^3}{6} \rho''' + \dots \end{aligned}$$

Multipliku ambaŭ flankojn de la dua ekvacio per $-\mathbf{e}_i^l$ kaj aldonu ĝin al la unua; ni trovos

$$\begin{aligned} (19) \quad -\mathbf{b}_i + \left(\rho + \tau_i \rho' + \frac{\tau_i^2}{2} \rho'' + \dots \right) \mathbf{e}_i^l &= \\ = \rho \mathbf{e} + \tau_i (\rho \mathbf{e})' + \frac{\tau_i^2}{2} (\rho \mathbf{e})'' + \dots \end{aligned}$$

El ĉi tiaj tri ekvacioj oni povas facile trovi $\rho \mathbf{e}$, $(\rho \mathbf{e})'$, $(\rho \mathbf{e})''$ kiel liniajn vektorfunkciojn de ρ , ρ' , ρ'' , kaj samtempe kiel liniajn kombinaĵojn de la vektoroj **b_i** kaj **e_i^l**. La parto entenanta la vektorojn **b_i** estas fakte la lokocentra aldono apud **R**, **R'**, **R''**, por transiri al la baricentro. (Ĉi tie oni devas operacii kun la baricentro, ĉar la intervaloj de la ekaga — elektita — momento ĝis la observomomentoj estas kelktagaj, kaj la tercentraj serioj havas uzeblan konverĝintervalon nur duonmonatan, pro kio ili tre malrapide konverĝas en kelktaga intervalo). Se ni pro mallonga skribo metos

$$(20) \quad D = \tau_1 \tau_2 \tau_{12} + \tau_{23} \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1 \tau_{31} = \\ = -\tau_{12} \tau_{23} \tau_{31} = |1 \ \tau_i \ \tau_i^2|,$$

kun la uzitaj signaĵoj $\tau_{ij} = \tau_j - \tau_i$, ni havos

$$(21) \quad \begin{cases} D \delta \mathbf{R} = \mathbf{b}_1 \tau_2 \tau_3 \tau_{23} + \mathbf{b}_2 \tau_3 \tau_1 \tau_{31} + \\ + \mathbf{b}_3 \tau_1 \tau_2 \tau_{12} = | \mathbf{b}_i \ \tau_i \ \tau_i^2 |, \\ D \delta \mathbf{R}' = \mathbf{b}_1 (\tau_2^2 - \tau_3^2) + \mathbf{b}_2 (\tau_3^2 - \tau_1^2) + \\ + \mathbf{b}_3 (\tau_1^2 - \tau_2^2) = |1 \ \mathbf{b}_i \ \tau_i^2|, \\ D \delta \mathbf{R}'' = 2 (\mathbf{b}_1 \tau_{23} + \mathbf{b}_2 \tau_{31} + \mathbf{b}_3 \tau_{12}) = \\ = 2 \cdot |1 \ \tau_i \ \mathbf{b}_i|. \end{cases}$$

La esprimoj por $\rho \mathbf{e}$, $(\rho \mathbf{e})'$, $(\rho \mathbf{e})''$ estos:

$$(22) \quad \begin{cases} D \rho \mathbf{e} = -D \delta \mathbf{R} + \rho | \mathbf{e}_i^l \ \tau_i \ \tau_i^2 | + \\ + \rho' | \tau_i \mathbf{e}_i^l \ \tau_i \ \tau_i^2 | + \frac{\rho''}{2} | \tau_i^2 \mathbf{e}_i^l \ \tau_i \ \tau_i^2 | \\ D (\rho \mathbf{e})' = -D \delta \mathbf{R}' + \rho |1 \ \mathbf{e}_i^l \ \tau_i^2| + \\ + \rho' |1 \ \tau_i \mathbf{e}_i^l \ \tau_i^2| + \frac{\rho''}{2} |1 \ \tau_i^2 \mathbf{e}_i^l \ \tau_i^2| \\ D (\rho \mathbf{e})'' = -D \delta \mathbf{R}'' + 2\rho |1 \ \tau_i \mathbf{e}_i^l| + \\ + 2\rho' |1 \ \tau_i \tau_i \mathbf{e}_i^l| + \rho'' |1 \ \tau_i \tau_i^2 \mathbf{e}_i^l|. \end{cases}$$

Anstataŭ ĉi tiun oni povus uzi senperan seriigon de la unuovektoroj, ekde la ligaĵo (7), t. e.

$$(23) \quad -\frac{\mathbf{b}_i}{\rho_i} + \mathbf{e}_i^l = \mathbf{e}_i = \mathbf{e} + \tau_i \mathbf{e}' + \frac{\tau_i^2}{2} \mathbf{e}'' + \dots$$

kaj kun la signoj (20) kaj (21) ricevi

$$(24) \quad \begin{cases} D \rho \mathbf{e} = -D \delta \mathbf{R} + \rho | \mathbf{e}_i^l \ \tau_i \ \tau_i^2 | - \\ - | \mathbf{b}_i \left(\frac{\rho}{\rho_i} - 1 \right) \tau_i \ \tau_i^2 | + \dots \\ D \rho \mathbf{e}' = -D \delta \mathbf{R}' + \rho |1 \ \mathbf{e}_i^l \ \tau_i^2| - \\ - |1 \ \mathbf{b}_i \left(\frac{\rho}{\rho_i} - 1 \right) \tau_i^2| + \dots \\ D \rho \mathbf{e}'' = -D \delta \mathbf{R}'' + 2\rho |1 \ \tau_i \mathbf{e}_i^l| - \\ - 2 |1 \ \tau_i \ \mathbf{b}_i \left(\frac{\rho}{\rho_i} - 1 \right)| + \dots \end{cases}$$

Oni tuj vidas ke la ĉefaj ĉitieaj partoj, t. e. membroj kun ρ estas la samaj kiel en (22). Ni signu ilin per

$$(25) \quad D\mathbf{e}^l = |\mathbf{e}_i^l \tau_i \tau_i^2|, \quad D(\mathbf{e}^l)' = |1 \mathbf{e}_i^l \tau_i^2|, \\ D(\mathbf{e}^l)'' = 2 |1 \tau_i \mathbf{e}_i^l|,$$

tiel ke post certaj neglektoj de la supergradaj membroj (al kiuj ni ankoraŭ revenos), oni povas — uzinte ankoraŭ la signaĵojn (21) — preni

$$(26) \quad \begin{cases} \mathbf{r} = -\mathbf{R}^b - \delta\mathbf{R} + \rho^b \mathbf{e}^l \\ \mathbf{r}' = -(\mathbf{R}^b)' - \delta\mathbf{R}' + \rho^b (\mathbf{e}^l)' + (\rho^b)' \mathbf{e}^l \\ \mathbf{r}'' = -(\mathbf{R}^b)'' - \delta\mathbf{R}'' + \rho^b (\mathbf{e}^l)'' + \\ + 2(\rho^b)' (\mathbf{e}^l)' + (\rho^b)'' \mathbf{e}^l. \end{cases}$$

Oni ne povas antaŭaserti kiu el ĉi tiuj du seriigoj pli konvenas: ambaŭ kvantoj estas preskaŭ periodaj kun la periodo de iom pli ol unu jaro. Por transiro de (22) al (25) aperas pli da neglektoj ol por transiro de (24) al (25), sed tio ne estas signo ke tiuj neglektoj estas pli grandaj ol aliaj, ĉar novaj neglektoj povas parte kompensi la antaŭajn. Ĉar (22) kaj (24) ne multe diversas kaj la seriigo (23) kondukas nin pli simple al la esprimoj (25), oni povus uzi nur ĝin anstataŭ seriigon de $\rho_i \mathbf{e}_i$. Sed aliflanke la seriigo de la funkcioj $\rho_i \mathbf{e}_i$ avantaĝas por pli simpla akiro de la esprimoj (21) por $\delta\mathbf{R}$, $\delta\mathbf{R}'$, $\delta\mathbf{R}''$, kiuj estis poste utiligataj ankaŭ en (24).

7) GRANDECO DE LA NEGLEKTITAJ MEMBROJ ĈE TRI OBSERVOJ

Ne tiom pro supre dirita kiom pro esploroj el la sekvanta punkto, serĉu valoron de la neglektitaj membroj — ĉu por unu ĉu por alia seriigo.

La ekvacioj (19) havas unuan malzorgitan membron $\frac{\tau_i^3}{3!} [(\rho \mathbf{e})''' - \rho''' \mathbf{e}_i^l]$, pro kio en la unua esprimo (22) estas neglektitaj kvantoj

$$(27) \quad \begin{cases} -\frac{1}{6} (\rho \mathbf{e})''' |\tau_i^3 \tau_i \tau_i^2| + \frac{\rho'''}{6} |\mathbf{e}_i^l \tau_i^3 \tau_i \tau_i^2| = \\ = -\frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{6} D \left[(\rho \mathbf{e})''' - \rho''' \frac{|1 \tau_i \tau_i^2 \mathbf{e}_i^l|}{|1 \tau_i \tau_i^2|} \right] \sim \\ \sim -\frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{6} D (3\rho'' \mathbf{e}' + 3\rho' \mathbf{e}'' + \rho \mathbf{e}'''). \end{cases}$$

Sammaniere oni trovas ke en la dua kaj la tria esprimoj (22) estas neglektitaj proksimume la kvantoj

$$(27'') \quad \begin{aligned} & \sum_{i \neq j} \tau_i \tau_j D (3\rho'' \mathbf{e}' + 3\rho' \mathbf{e}'' + \rho \mathbf{e}'''), \\ & -\frac{\sum \tau_i}{3} D (3\rho'' \mathbf{e}' + 3\rho' \mathbf{e}'' + \rho \mathbf{e}'''). \end{aligned}$$

En la seriigo (23) unua malzorgita membro estas $\frac{\tau_i^3}{6} \mathbf{e}'''$ kaj oni pli facile trovas la neglektitajn membrojn el (24), kaj ili kvantas

$$(28) \quad -\rho \mathbf{e}''' D \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{6}, \\ \rho \mathbf{e}''' \frac{\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3}{6} D, -\frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} D \rho \mathbf{e}'''.$$

Do evidentas ke la neglektoj estas samrangaj rilate al τ_i , ĉu oni utiligas (22) ĉu (24), kaj ke la avantaĝo de tiu aŭ alia dependas de tio ĉu $\rho \mathbf{e}'''$ multe diferencas de $\rho \mathbf{e}''' + 3(\rho' \mathbf{e}')'$, kiu diferenco kutime ne devus esti granda (ĉar, inter du stariĝlokoj de planedo, $\mathbf{e}$ ŝanĝiĝas multe pli rapide ol ρ).

Por ankoraŭ pli bone vidi la uzeblecon de la esprimoj (26), anstataŭ (22) kaj (24), donu pli konvenan formon al ĉi tiuj esprimoj. Pro tio ni seriigu $\mathbf{e}_i^l$ kelkloke dekstraflanke, kaj same ni prenu

$$\frac{\rho}{\rho_i} - 1 = -\tau_i \cdot \frac{\rho'}{\rho},$$

post kio, kun utiligo de (21) kaj (25), ni ricevos

$$(22') \quad \begin{cases} \rho \mathbf{e} = -\delta\mathbf{R} + \rho \mathbf{e}^l + \\ + [\rho' (\mathbf{e}^l)'' + \rho'' (\mathbf{e}^l)'] \frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{2} + \dots \\ (\rho \mathbf{e})' = -\delta\mathbf{R}' + \rho (\mathbf{e}^l)' + \rho' \mathbf{e}^l - \\ - [\rho' (\mathbf{e}^l)'' + \rho'' (\mathbf{e}^l)'] \frac{\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3}{2} + \dots \\ (\rho \mathbf{e})'' = -\delta\mathbf{R}'' + \rho (\mathbf{e}^l)'' + 2\rho' (\mathbf{e}^l)' + \\ + \rho'' \mathbf{e}^l + [\rho' (\mathbf{e}^l)'' + \rho'' (\mathbf{e}^l)'] \cdot \sum \tau_i + \dots \end{cases}$$

respektive

$$(24') \quad \begin{cases} \mathbf{e} = -\frac{\delta\mathbf{R}}{\rho} + \mathbf{e}^l + \frac{\rho'}{2\rho^2} \tau_1 \tau_2 \tau_3 \delta\mathbf{R}'' \\ \mathbf{e}' = -\frac{\delta\mathbf{R}'}{\rho} + (\mathbf{e}^l)' + \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{|1 \tau_i \mathbf{b}_i \tau_i^2|}{|1 \tau_i \tau_i^2|} \\ \mathbf{e}'' = -\frac{\delta\mathbf{R}''}{\rho} + (\mathbf{e}^l)'' + \frac{2\rho'}{\rho^2} \frac{|1 \tau_i \tau_i \mathbf{b}_i|}{|1 \tau_i \tau_i^2|}. \end{cases}$$

La lastaj membroj en (24'), pro malgrandaj kvantoj $\mathbf{b}_i$ (oni fotografas ĉefe sen lunlumo, kaj $\mathbf{b}_i$ estas normalo de la baricentro al la observodirekto), estas konsiderindaj nur escepte — ĉe tro malgrandaj tercentraj distancoj, respektive ĉe grandaj valoroj de ρ'/ρ^2 .

El (22') kaj (24') oni unue vidas ke la postaj neglektoj — transpase al (26) — samrangas, rilate al τ_i , je la antaŭaj neglektoj. Ĉee la entutaj neglektoj — el (27) kaj (22') — ekivalentas kun

la fruaj neglektoj (28) ĉe rekta seriigo de la unuovektoroj, nome kun

$$(29) \quad -\frac{\tau_1 \tau_2 \tau_3}{6} \rho e''',$$

$$\frac{\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3}{6} \rho e''' \text{ kaj } -\frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3}{3} \rho e''.$$

El ĉio ĉi sekvas ke utiligo de la ekvacioj (26) estas tute regula kaj ke tiam la esprimoj (29) donas la proksimumajn neglektojn, laŭforme tute la samajn kiel ĉe la seriigo de la lokocentraj koordinatoj. Tiel estas akiritaj, analize klarigitaj kaj praktike uzeblaj, esprimoj per kiuj oni forigas influon de la tagparalakso, t. e. de la observant-turniĝo (kiu kiel bele diris *Moulton* [5] — tie „havas nenian taskon“), kaj samtempe la neglektitaj supergradaj membroj estas derivaĵoj de baricentraj unuovektoroj, do ili estas multe pli etaj ol ĉe la lokocentra seriigo.

8) ELEKTO DE LA EKAGA MOMENTO

Estas kutimo ĉe la metodoj de *Laplace*-tipo preni por la momento por kiu oni derivas $\alpha, \alpha', \alpha''$, nomu ĝin „ekaga momento“, mezvaloron de ĉiuj tri observotempoj. Por tio ne ekzistas nerefuteblaj kialoj, sed oni akceptas la argumentadon de *Poincaré* [6], kiun transprenas kaj detaligas ankaŭ *Danjon* [2], kaj kiu reduktiĝas al tio (se oni uzas la supran eksplikadon kaj la signojn) ke devas nuliĝi la tria esprimo (29), t. e. la unua neglektita membro ĉe eltrovo de e'' . Oni ĉee ne konsideras sufiĉe ke ankaŭ e kaj e' estas eltrovitaj pro kio oni devas konsideri ankaŭ iliajn erarojn, t. e. la neglektitajn unuan kaj duan kvantojn (29), kaj ligite kun tio ankaŭ la observerojn. Krome oni devas konsideri ankaŭ praktikecon (kiu nur *Leuschner*-n decidigas por la meza observo anstataŭ mezo de la observoj). Se oni konsideras nur la duan derivon, oni eraras en tio ke ĝi jam sen tio determiniĝas plej neprecize, ĉar la observaj eraroj multobliĝas eltrovante la unuan derivon (pro divido per malgrandaj tempintervaloj τ), kaj poste ankoraŭfoje eltrovante la duan derivon. Kiam la tempintervaloj estas malgrandaj, kaj tio estas la sfero de avantaĝa uzebleco de *Laplace*-tipaj metodoj, tiam ĉi tiuj neglektoj estas samrangaj kun (29), pro kio oni devas konsideri ne nur la trian sed ankaŭ la unuajn du esprimojn (29).

Kiam mezo de la observoj preskaŭ kongruas kun la meza observo la problemo forfalas, ĉar tiam ĉiuj neglektoj estas malgrandaj, ĉu ni elektu tiun aŭ alian momenton por „ekaga“ (kaj la praktikeco postulas elekton de la meza observomomento). Kiam ja ekzistas grava diferenco inter ĉi tiuj du momentoj, t. e. oni temas pri grave neegaldistancaj observoj, tiam oni devas pripensi la elekton de la ekaga momento, ĉar oni ne rajtas neglekti la deflankiĝojn ĉe e kaj e' . Se oni por ekaga momento elektus mezon de la obser-

voj, la deflankiĝoj estus precipe grandaj ĉe e en okazo de grandeta tuta observintervalo; en okazo de malgranda tutintervalo ekzistas certe du observoj kies tempintervalo estas tre malgranda (ni ja supozis gravan neegaldistancecon), pro kio influo de observeroj sur e'' estas granda kaj ne utilas decidiĝi laŭ ĝi. Kaj se oni por ekaga momento elektus la mezan observon, tiam ĉio estas kontraŭa: e estus eltrovita sen neglektoj, ĉe e'' estus farita grava neglekto, dum ĉe e' oni devas ankoraŭ esplori ĝin — kompare kun tiu farita ĉe la elekto de mezo de la observoj kiel ekaga momento. Oni facile vidas ke $\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3$ minimumas (kun negativeco) en la mezo de la observoj kaj ke ĝi negativas por $t = t_2$ (dum ĝi pozitivigas por t_1 kaj t_3). Tio montras ke la elekto de la mezo de tri observoj estas plej malfavora elekto por ĝusteco de la unua derivado kaj ke ĉi tiu derivado estus plej ĝuste eltrovita se oni elektus certan momenton inter du pli proksimaj observoj (aŭ inter la mezo kaj la tria observo, kiam $\tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_1 \tau_3 = 0$). Do, nur konsidero de la dua derivado favoras la mezon de tri observoj, eĉ valoro de ĉi tiu konsidero pliektiĝas per la menciita influo de la observaj eraroj.

Kiel resumo de la supra analizo oni povas diri ke la mezon de tri observoj oni avantaĝas preni por ekaga momento nur kiam la observintervaloj estas grandetaj kaj grave neegalaj — ja ankaŭ tiam preferi preni iun momenton inter la meza observo kaj la mezo de tri observoj (ĉee pro praktikeco oni nature prenos meznoktan momenton), des pli malproksime de la mezo ju malpli egalas la intervaloj. En ĉiu alia okazo estas pli bone uzi la mezan observon por la ekaga momento.

Se oni kalkulas kun nur unua derivado, kiel estas en mia metodo por eltrovado de la orbitelementoj el du observoj kaj la moviĝdirekto, tiam tute forfalas la kialoj favoraj al la mezo de observoj kaj konsiderinda estas nur la meza observo. Tiam e estas jam determinita per observo, kaj nur e' estas eltrovenda, tiel ke el la formuloj (20), (21) kaj (25) ni havas

$$D = \tau_1 \tau_3 \tau_{31}, \quad \tau_{31} = \tau_1 - \tau_3, \quad e' = e_2^l, \quad \delta R = b_2$$

$$(30) \quad \begin{cases} (e^l)' = \frac{\tau_3}{\tau_1 \tau_{31}} (e_2^l - e_1^l) + \frac{\tau_1}{\tau_3 \tau_{31}} (e_3^l - e_2^l) \\ \delta R' = \frac{\tau_3}{\tau_1 \tau_{31}} (b_2 - b_1) + \frac{\tau_1}{\tau_3 \tau_{31}} (b_3 - b_2). \end{cases}$$

Se ĉee du observoj tre proksimas (en intervalo ĝis 0.1 de tago), en kalkulado de $(e^l)'$ kaj $\delta R'$ decida estas la unua parto, pro kio oni povas en la dua parto anstataŭigi la koeficienton per $-\tau_1/\tau_3^2$ ĉe $(e^l)'$, kaj tute forjeti ĝin ĉe $\delta R'$ (tiom pli se la dua kaj tria observoj okazis dum sama tagparto, t. e. se $b_3 \sim b_2$).

9) ELTROVO DE RAPIDO EL PLURAJ OBSERVOJ

Kiam oni havas plurajn observojn, ne estas bone ekiri de (19), ĉar tiel oni enkondukus plurajn nekonatojn: $\rho, \rho', \rho'', \rho''', \dots$ Estas pli bone ekiri de la ligaĵo (7) kaj seriigi la unuovektorojn, haltigante ĉe la derivo permesata de nombro de la observoj. Ni prenu ke oni disponas kun $k+1$ observoj. Tiam ni havas $k+1$ ekvaciojn por solvo:

$$(31) \quad -\frac{b_i}{\rho_i} + e_i^l = e + \tau_i e' + \frac{\tau_i^2}{2} e'' + \dots + \frac{\tau_i^k}{k!} e^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, k+1.$$

La solvoj estos en formo de determinantoj

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \dots & \tau_1^k \\ 1 & \tau_2 & \tau_2^2 & \dots & \tau_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \tau_{k+1} & \tau_{k+1}^2 & \dots & \tau_{k+1}^k \end{vmatrix} \\ e &= -\frac{\delta R}{\rho} + D^{-1} \begin{vmatrix} e_i^l & \tau_i & \tau_i^2 & \dots & \tau_i^k \end{vmatrix} \\ e' &= -\frac{\delta R'}{\rho} + D^{-1} \begin{vmatrix} 1 & e_i^l & \tau_i^2 & \dots & \tau_i^k \end{vmatrix} \\ e'' &= -\frac{\delta R''}{\rho} + 2 D^{-1} \begin{vmatrix} 1 & \tau_i & e_i^l & \dots & \tau_i^k \end{vmatrix} \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Evidentas ke ĉi tiuj esprimoj estas liniaj funkcioj de la unuovektoroj e_i^l kaj la koeficientoj apud la unuovektoroj estas subdeterminantoj de D je la unua, dua, tria... kolonoj, dividitaj per la valoro de la determinanto mem. La koeficientojn oni povas pere de krakovoj skribi en formo de malimplicaj funkcioj de la tempintervaloj. La samajn solvojn oni trovas ankaŭ per apliko de matriksoj, sed mi uzis krakovojn ĉar mi regas ilin pli facile (eble ja pro tio ŝajnas al mi ke ili estas pli konvena skribformo — esenco estas la sama kiel ĉe matriksoj).

Unue flankenlasu la lokocentran aldonon

$-\frac{b_i}{\rho_i}$, ĉar de ĝi oni formas $\delta R, \delta R', \dots$ sammaniere kiel $e^l, (e^l)' \dots$ de e_i^l . Oni povas skribi la ekvaciojn (31) en formo

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e' \\ \vdots \\ e^{(k)} \end{pmatrix} \cdot I \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & \tau_1^2 & \dots & \tau_1^k \\ 1 & \tau_2 & \tau_2^2 & \dots & \tau_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \tau_{k+1} & \tau_{k+1}^2 & \dots & \tau_{k+1}^k \end{pmatrix}$$

aŭ mallonge

$$(32) \quad \{e_i\}_k = \left\{ \frac{e^{(i)}}{i!} \right\}_k \cdot \{D_k\},$$

de kie aperas la formala solvo

$$(33) \quad \left\{ \frac{e^{(i)}}{i!} \right\}_k = \{e_i\}_k \cdot \{D_k^{-1}\},$$

kie $\{D_k^{-1}\}$ signifas inversan krakovjon de $\{D_k\}$, t.e. la krakovjon kies elementoj estas subdeterminantoj de $|D_k|$ dividitaj per valoro de la determinanto mem ([1], p. 44). La problemo reduktiĝas al eltrovo de elementoj de la krakovo $\{D_k^{-1}\}$.

El la supra ekspozado, konkrete el ekvacioj (21), oni scias ke

$$(34') \quad \begin{aligned} D_1^{-1} &= \begin{pmatrix} \tau_2 & -1 \\ \tau_{12} & \tau_{12} \\ -\tau_1 & +1 \\ \tau_{12} & \tau_{12} \end{pmatrix} \\ D_2^{-1} &= \begin{pmatrix} \tau_2 \tau_3 & -\tau_2 + \tau_3 & 1 \\ \tau_{12} \tau_{13} & \tau_{12} \tau_{13} & \tau_{12} \tau_{13} \\ -\tau_1 \tau_3 & \tau_3 + \tau_1 & -1 \\ \tau_{12} \tau_{23} & \tau_{12} \tau_{23} & \tau_{12} \tau_{23} \\ \tau_1 \tau_2 & -\tau_1 + \tau_2 & 1 \\ \tau_{13} \tau_{23} & \tau_{13} \tau_{23} & \tau_{13} \tau_{23} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

kie (ripetu) duoblaj apudsignoj signifas la diferencojn ($\tau_{ij} = \tau_j - \tau_i$). Skribu nun $\{D_3\}$ en la formo

$$\{D_3\} = \begin{Bmatrix} D_2 & \tau_4^3 \\ \tau_4^3 & \tau_4^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_2 & B \\ C & A \end{Bmatrix}$$

kaj al ĉi tiu krakovo apliku la formulon (5, 6) por inversigo de krakovoj ([1], p. 54) — ŝanĝante ĉe la signon A per D_2 , B kaj D_1 per A kaj A_1 . La kalkulo donas

$$A_1 = A - B \cdot D_2^{-1} \cdot IC = \tau_4^3 + IE \cdot IC = \tau_{14} \tau_{24} \tau_{34},$$

ĉe kio mi metis

$$-D_2^{-1} \cdot B = E = \{ -\tau_1 \tau_2 \tau_3, +(\tau_1 \tau_2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_2 \tau_3), -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) \}.$$

Plue estas (la novaj signaĵoj laŭ la menciita verko pri krakovoj):

$$\alpha = -D_2^{-1} \cdot B \cdot IA_1^{-1} = E \cdot A_1^{-1} = \frac{1}{\tau_{14} \tau_{24} \tau_{34}} E$$

$$\beta = -ID_2^{-1} \cdot IC = I \left\{ -\frac{\tau_{24} \tau_{34}}{\tau_{12} \tau_{13}}, \frac{\tau_{14} \tau_{34}}{\tau_{12} \tau_{23}}, -\frac{\tau_{14} \tau_{24}}{\tau_{13} \tau_{23}} \right\}$$

$$\alpha \cdot \beta = E \cdot I \left\{ \frac{-1}{\tau_{12} \tau_{13} \tau_{14}}, \frac{1}{\tau_{12} \tau_{23} \tau_{24}}, \frac{-1}{\tau_{13} \tau_{23} \tau_{34}} \right\},$$

kaj sekve

$$(34'') \quad \{D_3^{-1}\} = \left\{ \begin{array}{cccc} +\tau_2\tau_3\tau_4 & -(\tau_2\tau_3 + \tau_2\tau_4 + \tau_3\tau_4) & \tau_2 + \tau_3 + \tau_4 & -1 \\ \tau_{12}\tau_{13}\tau_{14} & \tau_{12}\tau_{13}\tau_{14} & \tau_{12}\tau_{13}\tau_{14} & \tau_{12}\tau_{13}\tau_{14} \\ -\tau_1\tau_3\tau_4 & \tau_1\tau_4 + \tau_1\tau_3 + \tau_3\tau_4 & -(\tau_1 + \tau_3 + \tau_4) & +1 \\ \tau_{12}\tau_{23}\tau_{24} & \tau_{12}\tau_{23}\tau_{24} & \tau_{12}\tau_{23}\tau_{24} & \tau_{12}\tau_{23}\tau_{24} \\ +\tau_1\tau_2\tau_4 & -(\tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_4 + \tau_2\tau_4) & \tau_1 + \tau_2 + \tau_4 & -1 \\ \tau_{13}\tau_{23}\tau_{34} & \tau_{13}\tau_{23}\tau_{34} & \tau_{13}\tau_{23}\tau_{34} & \tau_{13}\tau_{23}\tau_{34} \\ -\tau_1\tau_2\tau_3 & \tau_1\tau_2 + \tau_1\tau_3 + \tau_2\tau_3 & -(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3) & +1 \\ \tau_{14}\tau_{24}\tau_{34} & \tau_{14}\tau_{24}\tau_{34} & \tau_{14}\tau_{24}\tau_{34} & \tau_{14}\tau_{24}\tau_{34} \end{array} \right\}$$

Elementoj de ĉi tiu krakovjo en opaj kolonoj estos la koeficientoj apud e_i^l ĉe eltrovo de $e, e', e''/2, e'''/3! \dots$ el la ekvacioj (31). Pere de la lasta krakovjo oni povas plue, metinte

$$\{D_4\} = \left\{ \begin{array}{cc} D_3 & \tau_i^4 \\ \tau_5^4 & \tau_5^4 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} D_3 & B \\ C & A \end{array} \right\},$$

sammaniere apliki la menciitan formulon por inversigo de krakovjoj kaj per la sama vojo akiri

$$(34''') \quad \{D_4^{-1}\} = \left\{ \begin{array}{cccc} \tau_5\tau_2\tau_3\tau_4 & -\Sigma^1\tau_m\tau_n\tau_p & \Sigma^1\tau_m\tau_n & -\Sigma^1\tau_m & 1 \\ -\tau_3\tau_4\tau_5\tau_1 & \Sigma^2\tau_m\tau_n\tau_p & -\Sigma^2\tau_m\tau_n & \Sigma^2\tau_m & -1 \\ \tau_4\tau_5\tau_1\tau_2 & -\Sigma^3\tau_m\tau_n\tau_p & \Sigma^3\tau_m\tau_n & -\Sigma^3\tau_m & 1 \\ -\tau_5\tau_1\tau_2\tau_3 & \Sigma^4\tau_m\tau_n\tau_p & -\Sigma^4\tau_m\tau_n & \Sigma^4\tau_m & -1 \\ \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4 & -\Sigma^5\tau_m\tau_n\tau_p & \Sigma^5\tau_m\tau_n & -\Sigma^5\tau_m & 1 \end{array} \right\} : \begin{array}{l} \tau_{12}\tau_{13}\tau_{14}\tau_{15} \\ \tau_{12}\tau_{23}\tau_{24}\tau_{25} \\ \tau_{13}\tau_{23}\tau_{34}\tau_{35} \\ \tau_{14}\tau_{24}\tau_{34}\tau_{45} \\ \tau_{25}\tau_{35}\tau_{45}\tau_{15} \end{array}$$

ĉe kio estas per $\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3$, signita sumigo de ĉiuj produtoj en kiuj ne troviĝas $\tau_1, \tau_2, \dots$, kaj la denominatoroj apud la opaj vicoj montras per kiu nombro devas esti dividata ĉiu elemento de la vico.

Oni ja ne bezonas pluan kalkulon, por tamen povi facile skribi la pluajn inversajn krakovjojn. Per tio estas skribita, en ĝenerala formo, solvo de la ekvacisistemo (31), por ĉiuj nekonatoj $e, e', \dots, e^{(k)}$, senkonsidere ilian nombron. Por nia bezono

estas kompreneble interesaj nur elementoj de la unuaj tri kolonoj, resp. nur de la dua kaj de la tria kolono se por la ekaga momento estas elektita unu el la observomomentoj (tiam la koresponda elemento de la unua kolono havas valoron 1, kaj ĉiuj aliaj nulegalas).

Se ni jam ekiris de unu observo kiel ekaga momento, tiam ne nur simpliĝas la elementoj de la solvo-krakovjo, sed ankaŭ eblas malpliigi je 1 nombron de la ekvacioj kaj tamen nenion ŝanĝi en la ĝenerala solvo. Nome la ekvacioj (31), se

$$e = -\frac{b_s}{\rho_s} + e_s^l,$$

povas — subtrahinte unu de aliaj — esti prezentataj en la formo

$$\begin{aligned} -\frac{b_i}{\rho_i} + \frac{b_s}{\rho_s} + \frac{e_i^l - e_s^l}{\tau_i} &= e' + \tau_i \frac{e''}{2} + \\ &+ \tau_i^2 \frac{e'''}{3!} + \dots + \tau_i^{k-1} \frac{e^{(k)}}{k!}, \end{aligned}$$

ĉe kio $i = 1, 2, \dots, k+1$ (sen s). El la krakovjo $\{D\}$ forfalas s -a vico kaj ĝia grado malplialtiĝas je 1, kaj en la inversa krakovjo la elementoj de la unua, dua, ktp. kolonoj servas kiel koeficientoj por kalkuli $e', e''/2, e'''/3! \dots$ pere de jam pretaj esprimoj

$$(35) \quad \left\{ \frac{e^{(i)}}{i!} \right\}_{k-1} = \left\{ \frac{e_i - e_s}{\tau_i} \right\}_{k-1} \cdot \left\{ D_{k-1}^{-1} \right\} + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{b_s - b_i}{\tau_i} \right\}_{k-1} \cdot \left\{ D_{k-1}^{-1} \right\}.$$

10) AVANTAĜOJ DE LA UTILIGO DE PLURAJ OBSERVOJ

Se ni disponas pri pli ol tri observoj, ŝajnas esti natura utiligi ilin tuj ĉe la orbitkalkulo. Ĉe la metodoj de Gauss-tipo tio nek eblas, nek oni bezonas ĝin tuj en la komenco, sed ĉe Laplace-tipaj metodoj (kiel ankaŭ ĉe la metodo por orbitdetermino el du observoj kaj la tagmoviĝo) oni bezonas tion, ĉar oni agas per la derivitaj komencaj donoj, kiuj estos des pli ĝustaj ju pli multaj estos la observoj el kiuj oni derivas ilin. Unu el kialoj pro kiuj oni tamen evitas la utiligon de pluraj observoj estas ĉiam pligrandiganta derivadkomplikeco kiam oni pligrandigas ekvacinombrojn. Sed ĉi tiu kialo nun forfalas, ĉar la ĝenerala solvo en la formo (33) aŭ (35), kun la valoroj (34) por $\{D_k^{-1}\}$ grave faciligas la laboron.

Kiel vera malhelpo por la utiligo de pluraj observoj restas nur kialo de pure objektiva naturo: supran limon de precizeco starigas la observaj eraroj. El (35) evidentas ke la observaj eraroj multobliĝas

en la derivoj, kiam τ_i estas malgrandaj. La krakovjoj (34) diras ke la multobliĝo kreskas ĉe e'' kun malgrandeco de τ_i^2 . Pro tio ĉe *Laplace*-tipaj metodoj utilas preni plurajn observojn nur ĝis ekvilibriĝo de influo de la observaj eraroj kun influo de la neglektitaj superaj derivoj. Esploru iom pli proksime ĉi tiujn influojn.

Signu ni per τ' la plej grandan (absolutvalore) elementon de la dua kolono en $\{D_k^{-1}\}$, kaj per δe la observan eraron; tiam la maksimuma influo de observa eraro estas $|\tau'| \|\delta e\|$. Ĉee interesas mencii ke oni tuj ekvidas ke τ' estas tiu elemento el la dua kolono en kiu troviĝas du minimumaj (kaj najbaraj) tempintervaloj τ_{mn} , el kio klare vidiĝas la dependeco de la maksimuma influo (de observaj eraroj) de proksimeco de la prenitaj observoj. Sed la dependecon oni ne rajtas preni neelaste. Nome se oni havas 4 observojn, el kiuj tri proksimaj egaldistancaj, tiam la numeratoro preskaŭ nulegalas ĝuste en tiu esprimo kies denominatoro minimumas (v. $\{D_3^{-1}\}$). Do oni ne povas certige fiksi kiu elemento estos τ' , sed oni povas ĝenerale diri ke la influo de observaj eraroj kreskas kun proksimeco de la prenitaj observoj, kaj malkreskas kun egaldistanceco de la najbaraj observoj.

Simile ankaŭ influo de la observaj eraroj al la dua derivivo estos $|\tau''| \|\delta e\|$, ĉe kio τ'' inversproportias, ĝenerale, kun produto de du plej etaj tempintervaloj.

Pri influo de la neglektitaj membroj ni nature limiĝos je influo de la unua neglektita derivivo. Estus tro vaste se oni ĉion skribus, sed anstataŭiginte en

$$(33) e_i \text{ per } -\frac{\tau_i^{k+1}}{(k+1)!} e^{(k+1)}, \text{ relative facile oni povas}$$

vidi ke numeratoroj de la lasta vico de la sekvant-grada krakovjo $\{D_{k+1}^{-1}\}$, apud iu konstanta faktoro, donas la koeficientojn de $e^{(k+1)}$. Valoro de la koeficientoj malkreskas kun plietigo de tempintervaloj, tiom pli se nombro de la prenitaj observoj estas iom pli granda. Oni povas facile kalkuli la koeficientojn kaj vidi kiom ili influas la unuan kaj la duan derivon (ĉe pluraj observoj forfalas influo de la neglektitaj membroj al la elektita pozicio mem, ĉar oni supozas prenita por ekaga momento la momento de unu el mezaj observoj — baze al analizo farita por okazo de tri observoj). Kvankam ni ne scias la kvanton de unua neglektita derivivo, tamen — kiel tion faras *Leuschner* en sia traktado de influo de pluraj observoj ([4], p. 454) — oni povas el rilato inter opaj kvantoj, t.e. el ŝanĝrapideco de α , δ , kaj de iliaj derivivoj, taksu proksimuman valoron de unua neglektita derivivo. Nur tiam oni povus konkrete kompari influon de la neglektitaj membroj kun influo de la observaj eraroj.

Sed oni ne povas fari ĉiujn tiujn kalkulojn sen konkretaj donoj, kaj ni utiligu nur ĝeneralajn

konkludojn de la supra analizo. Ili estas: ĉe metodoj de *Laplace*-tipo oni bezonas utiligi plurajn observojn tuj komence tiam kiam la observoj ne proksimas, kaj krom tio 3—4 el ili estas preskaŭ egaldistancaj, kaj kiam samtempe superrangaj diferencoj de e_i (respektive de α_i , δ_i) malkreskas nerapide. Do evidentas ke kun tiaj limigoj oni malofte havos okazon tuj utiligi multajn observojn — 4—5 el ili tute sufiĉos.

Iom aliel staras la afero ĉe la metodo por orbitdetermino el du observoj kaj la tagmoviĝo. Tie oni ne bezonas la duan derivon, pro kio la observaj eraroj grave malpli influas, ĝuste ilia influo inverse proporcias (ĝenerale, ĉar ekzistas ankaŭ aliaj influoj) kun plej mallonga tempintervalo inter du observoj. Do se la observoj iom pli distancas en tempo, kaj la superrangaj diferencoj nerapide malkreskas, tiam estas rekomendinda la utiligo de pluraj observoj, ĉar tuj komence estas akirata sufiĉe ĝusta ĉefa dono (la unua derivivo). Tiel plivastiĝas sfero de ĝia uzebleco, kvankam la sfero de ĝia avantaĝa apliko estas la okazo: du proksimaj kaj unu malpli proksima observo (anstataŭ du povas esti pluraj proksimaj, el kiuj eblas bone trovi la unuan derivon).

*
* *
*

Mi finu kun du gravaj rimarkoj.

En la tuta ekspozado ĉi tie oni seriigis la unuovektorojn kaj pozicivektorojn. Sed ili estas kontinuaj funkcioj de la ekvatoraj koordinatoj. Tial la samajn seriojn — post antaŭa forigo de paralaksinfluo, per la korespondaj korektoj δR , $\delta R'$, $\delta R''$ — oni povas uzi por seriigo de la sferaj koordinatoj α_i , δ_i , kaj do ankaŭ por eltrovado de la ekagaj donoj α , α' , α'' , δ , δ' , δ'' . Kiam oni havas tiajn ekagajn donojn oni facile trovas e , e' , e'' , se oni operacias per vektoroj. Ĉu ni unue kalkulos la vektorojn e_i , kaj el ili trovi la derivojn, aŭ ni trovos la derivojn de la unuovektoroj pere de la derivoj de sferaj koordinatoj, tio dependas de kutimoj kaj de disponaj kalkuliloj. Tial pli malnovaj verkoj (ekz. *Harzer* [3]) serĉas plisimpligon de *Laplace*-metodo pere de pli precizaj derivivoj de sferaj koordinatoj, dum nuntempaj kalkulaĵoj preferas ortajn koordinatojn.

La dua rimarko koncernas eblecon forĵeti tutan procedon de kalkulo por δR , $\delta R'$, $\delta R''$, en okazo de pluraj observoj. Nome kelkfoje mi vidis ke oni povas, sen malutiligi ĝustecon de la eltrovitaj derivivoj, ekiri de la lokocentraj ekvacioj por e_i kaj R_i kaj el ili trovi la unuajn kaj duajn derivivojn por la ekaga momento t , aplikante la trovitan solvon (en krakovjoformo). Se oni utiligas la trovitajn derivivojn en la ekvacioj por suncentra pozicivektoro kaj ĝiaj derivivoj, oni atingas sen aliaj ajn korektoj (ĉe pluraj observoj) samvalorajn rezultatojn kiel kun reduktado al la baricentro kaj kun apliko de la korespondaj korektoj. *Poincaré*

[6] rekomendas ĉi tiun procedon (sen pruvoj) eĉ por tri observoj. Sed la pruvigo de ĉi tiu ebleco, respektive solvo de la problemo en kiuj okazoj kaj en kiuj limoj oni povas utiligi ĉi tian procedon, estas ankoraŭ serĉenda.

LA MENCITA LITERATURO:

[1] BANACHIEWICH TH.: „Zur Berechnung der Determinanten, wie auch der Inversen, und zur darauf basierten Auflösung der Systeme linearer Gleichungen“, *Acta astronomica*, Kraków, Série c, Vol. 3, pp. 41-72.

[2] DANJON A.: „Deux modes d'application de la méthode de Laplace pour la détermination des orbites“, *Bulletin astronomique* XVI, Paris 1951, pp. 85—110.

[3] HARZER P.: „Über eine allgemeine Methode der Bahnbestimmung“, *Astronomische Nachrichten* 141, 1896, pp. 177-198.

[4] KLINKERFUESS W.: „Theoretische Astronomie“, III eldono, Braunschweig 1912 (sur la pp. 448-490, kaj en posta formulkolekto, estas detale ekspozita la metodo de *Leuschner* el *Publ. Lick Observatory*, kiun mi ne sukcesis akiri).

[5] MOULTON F. R.: „Memoir on the Theory of Determining Orbits“, *Astronomical Journal* XXVIII, 1914, p. 103.

[6] POINCARÉ H.: „Sur la détermination des orbites par la méthode de Laplace“, *Bulletin astronomique* 23, Paris 1906, pp. 161—187.

DÉTERMINATION PHOTOGRAPHIQUE DES POSITIONS RELATIVES DE LA LUNE ET DU SOLEIL AU COURS D'UNE ÉCLIPSE

par P. M. DJURKOVIĆ

I. — Si l'on a l'instrument à grand objectif dont l'image du soleil au foyer a un diamètre de 10 cm, comme c'est le cas avec Zeiss réfracteur 65/1055 cm à l'Observatoire astronomique de Beograd, il est possible par une série des clichés, prises au cours de l'éclipse, de trouver les positions relatives précises du centre de disque lunaire par rapport au centre de disque solaire. De ces positions on peut trouver les instants du premier et du dernier contact, le maximum de la phase et la grandeur maximum de l'éclipse.

Soient $R_{\odot}$ et R_{L} les rayons apparents du soleil et de la lune. Supposons que la surface du ciel autour du centre de soleil se trouve dans le même plan à une distance angulaire $r = R_{\odot} + R_{\text{L}}$.

Si nous prenons au cours de l'éclipse, dans les intervalles de temps approximativement égaux, deux expositions du soleil sur chaque cliché, en arrêtant chaque fois le mouvement du régulateur après la première, on aura pour chaque cliché la direction du mouvement diurne. Dans ce cas on peut mesurer les positions du centre lunaire dans un système des coordonnées dont le centre se trouve au centre de disque solaire, l'axe x étant dirigée vers le pôle nord et l'axe y faisant l'angle $+90^\circ$ dans le sens direct de l'axe x .

Pour la détermination du mouvement diurne on prend les petites taches solaires ou les irrégularités du bord lunaire comme les points de repères. Dans le calcul, évidemment, il faut tenir compte du mouvement de soleil et de la lune. Mais, à cause de mauvaises plaques photographiques, nous avons négligé tous les petits changements et pourtant les résultats obtenus dans l'exemple auquel ce procédé fut appliqué satisfont bien les observations visuelles.

II. — Choisissons maintenant quatre points sur le bord du disque solaire. Deux points se trouvent sur la corde commune des disques solaire et lunaire et les deux autres ont les positions convenables de sorte que les symétrales des cordes entre les points n'ont pas les mêmes coefficients angulaires.

Soient $(x_1, y_1) \dots (x_4, y_4)$ les coordonnées de ces points, obtenus par la machine à mesurer les plaques photographiques (Fig. 1). Désignons par (x_{ij}, y_{ij}) les coordonnées du centre de la corde: (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4). Les coordonnées $X_{\odot}, Y_{\odot}$ du centre de disque solaire peuvent être calculées par la méthode des moindres carrés

de six équations de la forme

$$Y_{\odot} + \cotg \theta \cdot X_{\odot} = y_{ij} + \cotg \theta \cdot x_{ij},$$

où θ est l'angle connu que fait la corde ij avec l'axe x .

De même façon nous pouvons déterminer les positions de disque lunaire. Mais, au commencement et à la fin de l'éclipse on prend outre les points 1 et 2 (v. fig. 1) seulement un point 3',

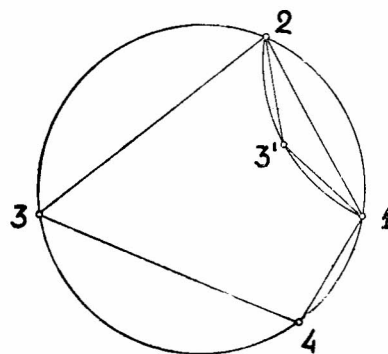


Fig. 1

évitant de cette façon l'incertitude de l'intersection entre les symétrales dont les coefficients angulaires sont approximativement les mêmes. Dans ce cas on trouve les coordonnées du centre de disque lunaire par les trois au lieu par les six équations données.

Les rayons des disques solaire et lunaire s'obtiennent des équations

$$(x_i - X_{\odot})^2 + (y_i - Y_{\odot})^2 = R_{\odot}^2$$

$$(x_i - X_{\text{L}})^2 + (y_i - Y_{\text{L}})^2 = R_{\text{L}}^2.$$

De cette façon les n clichés donnent les n valeurs $R_{\odot}$ et R_{L} . Ces valeurs, exprimées en millimètres, donnent les rayons moyens apparents du soleil et de la lune en secondes angulaires.

Enfin, les équations suivantes donnent les positions relatives du centre de disque lunaire par rapport au centre de disque du soleil

$$\begin{aligned} X &= X_{\text{L}} - X_{\odot}, \\ Y &= Y_{\text{L}} - Y_{\odot}. \end{aligned} \quad \dots (1)$$

III. — Les n valeurs X, Y de l'équation (1) satisfont une courbe du deuxième ordre

$$Y = p X^2 + q X + s, \quad \dots (2)$$

Par la méthode des moindres carrés il est facile de calculer les quantités inconnues p, q, s dans le système des n équations (2).

Mais les points (X, Y) contiennent tous les erreurs de déterminations des positions de centres des disques solaire et lunaire. En égard aux petits changements des positions relatives de la lune, la corrélation entre la position trouvée et le temps de l'exposition est très subtile. Donc, le point essentiel du procédé consiste à trouver quel point (X, Y) de la courbe (2) correspond au temps de l'exposition t_i du cliché i . Nous voulons résoudre le problème par les approximations successives.

Première approximation. — Pour qu'on puisse déterminer le mieux que possible quel point sur la courbe (2) correspond au temps t_i , nous abaissons le point (X_i, Y_i) sur la courbe suivant le rayon de courbure qui passe par le point (X_i, Y_i) . (Fig. 2).

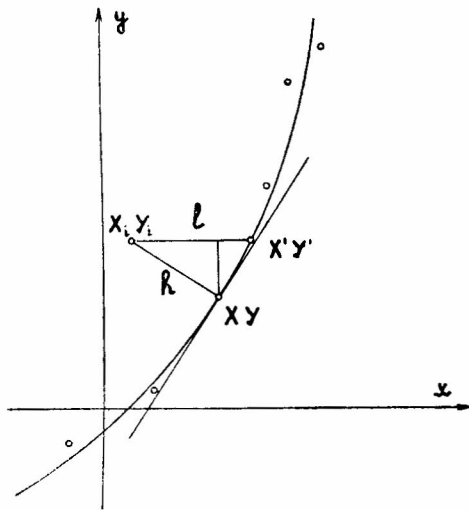


Fig. 2

La normale en point (X, Y) de la courbe (2) fait avec l'axe x un angle α déterminé par

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2pX + q}$$

Mais, comme $\Delta X = X - X_i$ est une quantité petite, nous pouvons déterminer α de l'équation

$$\operatorname{tg} \alpha_i = -\frac{1}{2pX_i + q},$$

le quadrant de l'angle étant donné par la série des points. Donc, il sera:

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= h \cos \alpha_i \\ \Delta Y_i &= h \sin \alpha_i \end{aligned} \quad \dots (3)$$

où l'on trouve la quantité h de façon suivante. Soit X', Y' l'intersection de la courbe (2) et de la

droite parallèle à l'axe x passant par le point (X_i, Y_i) . Dans ce cas nous avons

$$l = X' - X_i = -\left[\frac{1}{2p} \left(q - \sqrt{q^2 - 4p(s - Y_i)} \right) + X_i \right],$$

et

$$h = l \cos \alpha_i.$$

En appliquant les corrections (3) sur la série (1) des positions relatives du centre de la lune, nous aurons les points corrigés avec lesquels il est possible de trouver la vitesse du mouvement de la lune au cours de l'éclipse.

Dans ce but nous avons premièrement à rectifier la courbe (2), trajectoire apparente du mouvement de la lune. Désignons, donc, par S la longueur de l'arc de la courbe (2) entre le point (X_o, Y_o) , qui est d'après l'éphéméride le plus proche du maximum de l'éclipse et le point (X_i, Y_i) . Puisque

$$S = \int_{X_o}^{X_i} \sqrt{1 + q^2 + 4pqX + 4p^2X^2} dX$$

en posant

$$u = 2pX + \sqrt{1 + q^2 + 4pqX + 4p^2X^2} \quad \dots (4)$$

nous avons

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{16p} \left| (u + q)^2 \right|_{u_o}^{u_i} - \frac{1}{16p} \left| \frac{1}{(u + q)^2} \right|_{u_o}^{u_i} + \\ &+ \frac{2.302585}{4p} \left| \log(u + q) \right|_{u_o}^{u_i} \quad \dots (5) \end{aligned}$$

Désignons maintenant par c le segment de l'arc parcouru dans une unité de temps (1^m) entre les points successifs. Donc, entre les points i et j il sera

$$c_{ji} = \frac{S_j - S_i}{t_j - t_i}, \quad \dots (6)$$

où c_{ji} est la vitesse moyenne du mouvement de la lune au point dont l'arc

$$S_{ji} = \frac{S_j + S_i}{2}.$$

Comme nous avons à déterminer le premier et le dernier contact et comme leurs moments sont connus par l'éphéméride avec une erreur de quelques secondes, on peut ici calculer aussi c_{pl} et c_{nf} pour le commencement et la fin de l'éclipse. Pour ça il faut déterminer la longueur de l'arc S_p et S_f entre

le point (X_o, Y_o) et le centre de disque lunaire aux moments du premier et du dernier contact. Quoique le rayon apparent de la lune change au cours de l'éclipse, ce qu'il serait possible de déceler par les clichés meilleurs que les nôtres, nous avons négligé ces changements parce qu'ils ne sont pas constatés par nos observations, de sorte que nous avons pris $r = R_\odot + R_\oplus$ comme une constante au cours de la durée de l'éclipse. Donc, les intersections d'un cercle du rayon r avec la courbe (2) donnent les valeurs nécessaires X pour le premier et le dernier contacts par l'équation

$$f(X) = pX^4 + 2pqX^3 + (1 + q^2 + 2ps)X^2 + 2qsX + s^2 - r^2 = 0,$$

qu'on peut résoudre par la méthode d'approximation de Newton en posant $X = X_1 + \Delta X$, ou

$$\Delta X = -\frac{f(X)}{f'(X)}.$$

Avec les valeurs X ainsi trouvées on peut calculer c_{pi} et c_{nj} en utilisant les temps donnés de l'éphéméride.

De la série des valeurs $c_{p1}, c_{12}, \dots, c_{n-1,n}, c_{nj}$ on voit que la vitesse du mouvement de la lune change en fonction du l'arc S . Donc, si nous désignons par c_o la vitesse en point (X_o, Y_o) , nous pouvons présenter le changement de la vitesse par l'équation

$$S_{ji}b + c_o = c_{ji}.$$

Par la méthode des moindres carrés on peut calculer les inconnues b et c_o de système des $n+1$ équations données. Puis avec b et c_o on trouve

$$c_i = S_i b + c_o,$$

ou la vitesse du mouvement de la lune pour tous les points de l'arc S_i .

De valeurs corrigées c_i suit la vitesse moyenne de la lune entre les points i et j

$$c_{ji} = \frac{c_i + c_j}{2}$$

et par l'équation (6)

$$t_j = t_i + \frac{S_j - S_i}{c_{ji}},$$

c'est-à-dire nous pouvons calculer le temps t de chaque point par les temps de l'exposition de tous les autres clichés et les valeurs c et S trouvés comme nous avons dit ci-dessus.

Deuxième approximation. — Désignons maintenant par t'_j la moyenne de tous les t_j calculés et posons

$$\Delta t_j = t_j - t'_j.$$

Si $\Delta t_j < 6''$ nous prenons que S_j est bien déterminé. De cette façon nous pouvons choisir m points qui nous serviront de base de correction S pour les autres $(n-m)$ points où le lien entre S et t n'est pas bien déterminé. L'accroissement de l'arc au point i est

$$\Delta S_i = c_i \Delta t_i.$$

et si le point i est le premier entre $(n-m)$ points mal déterminé, nous avons

$$S_{i \text{ corr}} = S_i + \Delta S_i.$$

Pour le deuxième point nous pouvons prendre outre les m points, encore le point corrigé i et appliquant le même procédé nous calculerons son arc corrigé. De cette façon nous obtiendrons finalement le nouveau système de valeurs S pour tous les n points. Puis au moyen de ce système on calcule par le procédé décrit les nouvelles valeurs b et c_o .

De même façon que nous avons déterminé t dans les cas des points observés, nous pouvons le calculer pour le commencement et la fin de l'éclipse en utilisant les valeurs nouvelles S , b et c_o .

IV. — Il reste à déterminer le maximum de fase et la grandeur maximum de l'éclipse. Ici nous pouvons utiliser aussi le point (X_o, Y_o) .

La normale sur la tangente en point (X_m, Y_m) passe par le centre du soleil et a la forme

$$Y = -\frac{1}{pX_m + q} X = \operatorname{tg} \alpha_m X$$

L'intersection de cette droite avec la courbe (2) donne

$$X_m = -\frac{1}{2p} (q - \operatorname{tg} \alpha_m - \sqrt{(q - \operatorname{tg} \alpha_m)^2 - 4ps}),$$

$$Y_m = pX_m^2 + qX_m + s.$$

En posant au lieu de $\operatorname{tg} \alpha_m$ la valeur $\operatorname{tg} \alpha_o$ calculée ci-dessus pour le point (X_o, Y_o) , nous aurons la première approximation de la position du centre de la lune au moment de fase maximum de l'éclipse. La répétition du calcul nous donne les valeurs nouvelles (X_m, Y_m) qui sont ordinairement les mêmes après la troisième approximation, parce que le point (X_o, Y_o) est choisi au voisinage du maximum de l'éclipse.

Avec X_m ainsi trouvé il est facile de calculer S_m et puis t_m . En posant

$$r_m = \sqrt{X_m^2 + Y_m^2},$$

on trouve la grandeur maximum G de l'éclipse par l'équation

$$G = 1 - \frac{r_m}{2R_{\odot}}.$$

V. — Ce procédé appliqué à l'éclipse partielle du soleil le 30 juin 1954 donne pour le commencement de l'éclipse le moment qui s'accorde bien avec la valeur de l'observation visuelle au même instrument (la fin n'était pas noté visuellement). Cependant les moments calculés pour le commencement et la fin de l'éclipse différent de la même valeur absolue des moments obtenus par le spectroscopie à protubérance où il s'agit d'un phénomène

que l'on peut noter avec une erreur de $\pm 0^{\circ}.1$ et d'un phénomène qui devrait avoir lieu avant le commencement et après la fin de l'éclipse observé visuellement, parce que le phénomène se passe dans la chromosphère du soleil.

Par une série de comparaisons de même sorte on pourrait voir si cette différence est constante pour un observateur et pour un instrument donné. De la même façon ce procédé pourrait être utilisé dans les recherches d'autres problèmes que l'on peut résoudre par les mesures précises des positions relatives de la lune et du soleil pendant une éclipse.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
<i>M. Protitch, Č. Čepinac</i> , Observations photographiques des petites planètes	1
<i>P. Djurković, Lj. Dačić</i> , Mesures micrométriques d'étoiles doubles	2
<i>V. Milovanović, B. Ševarlić, G. Teleki</i> , Observations à la lunette zénithale	3
<i>Z. Brkić, Lj. Mitić</i> , Détermination de l'heure en 1956	4
<i>Z. Brkić, Lj. Mitić</i> , Heures demi-définitives en 1956	5
* * * , Occultations d'étoiles par la Lune	8
<i>R. Mitrinović</i> , Identification des petites planètes	8
<i>R. Mitrinović</i> , Orbites circulaires des petites planètes	10
<i>B. Popović</i> , Pliprecizigoj de eltrovataj rapidoj de planedetoj	11
<i>P. Djurković</i> , Détermination photographique des positions relatives de la Lune et du Soleil au cours d'une éclipse	23