

BULLETIN

DE

L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE DE BEOGRAD

ANNÉE 1959

N^{OS} 1—2

VOLUME XXIV

RÉDACTEUR

M. B. PROTITCH

Naučno delo

IMPRIMERIE ET ÉDITEUR „NAUČNO DELO“
B E O G R A D 1960

BULLETIN

DE

L'OBSERVATOIRE ASTRONOMIQUE DE BEOGRAD

ANNÉE 1959

NOS 1—2

VOLUME XXIV

MESURES MICROMÉTRIQUES D'ÉTOILES DOUBLES

Faites au réfracteur de 0,65 m d'ouverture

par P. M. DJURKOVIĆ (Dj) et Lj. M. DAČIĆ (Dc)

ADS No et désignation	Epoque 1959 +	Θ	ρ	Grandeurs* Dj Dc	ADS No et désignation	Epoque 1959 +	Θ	ρ	Grandeurs* Dj Dc
1081 = Σ113	—013	9.0	1.69	6.8 — 8.0	7203 ¹ = Σ1306	311	19.3	2.15	5.0 — 8.6 2
	028	9.1	1.74	6.5 — 7.9 2		342	18.2	1.98	5.0 — 8.8 1
2014 = Σ283	033	207.8	1.66	7.9 — 8.8 2	7209 = Hu864	254	11.6	0.70	9.3 — 9.5 1
	033	208.3	1.76	7.8 — 8.7 2		307	12.1	0.72	9.5 — 9.8 2
2019 = A1279	033	306.1	1.95	9.2 — 9.3 2	7284 ² = Σ3121	287	343.2	0.32	8.2 — 8.2 1
	033	306.2	1.98	9.1 — 9.4 2	7456 = Σ1372	191	61.9	0.50	9.1 — 9.2 2
2052 = OΣ44	008	55.9	1.38	8.0 — 8.8 2		224	61.0	0.48	8.5 — 8.5 2
	008	54.7	1.42	8.1 — 8.8 2	7704 ³ = OΣ215	173	187.7	1.26	7.2 — 7.4 2
2071AB = Leo7	084	14.3	2.17	9.8 — 11.2 1		187	186.1	1.28	7.0 — 7.1 1
2117 = β9	084	186.7	1.66	6.5 — 8.6 1	7745 = Es917	221	149.3	1.92	9.6 — 10.0 2
2867 = OΣ67	084	47.4	1.70	5.0 — 8.4 2		221	148.7	2.02	9.7 — 10.0 2
	084	45.9	1.72	5.0 — 8.2 3	7747 = A1990	178	291.8	1.26	9.2 — 9.4 2
2890 = J306	021	87.5	2.19	9.1 — 9.4 2		187	289.5	1.32	8.8 — 8.9 1
	021	88.2	2.33	9.2 — 9.4 2	8047 = Ho378	222	233.3	0.79	8.4 — 8.9 2
3638 = Es1718	107	276.0	2.38	9.7 — 9.9 2		222	232.6	0.92	8.2 — 8.6 2
	125	277.1	2.38	9.7 — 9.9 1	8157 = Ku 37	229	322.4	1.84	9.5 — 10.6 1
4491 = OΣ123	170	185.3	1.90	7.0 — 9.0 2		268	322.2	1.80	9.6 — 10.6 3
	170	184.8	1.89	7.0 — 8.9 2	8170 = Mlb208	230	40.1	1.56	9.5 — 10.3 1
						273	41.8	1.56	9.7 — 10.2 3
4611 = Hu1236	168	31.8	0.44	9.8 — 9.7 2	8241 = A1996	174	185.7	1.83	9.3 — 9.3 2
	168	32.0	0.49	9.9 — 9.8 2		187	184.6	1.82	9.2 — 9.2 1
4861 = J392	139	300.3	2.10	8.4 — 10.6 2	8270 = A74	226	310.3	1.23	9.5 — 9.8 2
	187	298.5	2.10	8.8 — 10.2 1		226	310.3	1.24	9.4 — 9.8 2
5221 = β194	126	275.8	1.30	8.0 — 8.8 1	8667 = Hu893	420	30.6	1.52	9.6 — 9.6 2
	142	277.9	1.31	8.4 — 8.9 2	8748 = A1853	287	298.1	0.93	9.6 — 12.6 1
5261 = A2451	168	144.3	0.60	9.2 — 9.2 2	8751 = Σ1711	384	343.6	0.57	8.9 — 9.3 3
	168	143.9	0.62	9.1 — 9.4 2					
5269 = Σ941	120	83.3	1.98	7.0 — 8.2 1	8759 = β929	408	204.2	0.70	6.8 — 7.1 2
	139	82.1	1.75	7.0 — 8.2 2	8864 = Σ1734	312	182.6	1.10	7.4 — 7.7 2
						342	183.1	1.04	7.5 — 8.0 1
5280 = OΣ150	210	73.9	Round	1	9182 ⁴ = Σ1819	312	285.1	0.90	8.0 — 8.1 2
5896 = Σ1033	224	275.7	1.54	7.9 — 8.3 1		342	283.7	1.05	8.0 — 8.0 1
	224	276.6	1.56	7.6 — 8.2 3	9194 = A1616	336	93.0	1.31	9.4 — 9.8 2
6054 = Es772	038	96.6	1.01	9.5 — 9.6 1		342	94.1	1.28	9.5 — 9.7 1
	062	93.6	1.24	9.4 — 9.6 2	9249 = A149	389	138.7	0.69	9.9 — 9.4 3
6067 = A2045	221	8.2	1.19	8.6 — 9.6 2					
	227	9.8	1.04	8.6 — 9.6 2	9380 ⁵ = Σ1879	379	95.9	1.38	7.8 — 8.8 3
6358 = J707	136	119.5	1.84	9.6 — 9.6 2	9554 = OΣ295	380	137.3	0.77	8.8 — 9.4 3
	187	119.4	1.84	9.4 — 9.3 1	9639 = OΣ296	316	285.4	1.74	7.9 — 9.2 2
6359 = Ol 78	192	300.0	1.76	9.7 — 9.9 2		342	285.5	1.76	7.5 — 8.8 1
	210	300.2	1.91	9.7 — 10.0 1	10109 = Young-	428	216.5	1.26	8.8 — 9.8 3
6540 = A2469	224	47.0	1.29	9.6 — 10.5 2	10487 = Kr 46	424	63.0	1.59	9.0 — 9.3 3
	224	47.0	1.30	9.4 — 10.4 2	11077 ⁶ = AC15	597	322.7	1.17	6.0 — 9.2 2
6946 = β209	218	2.7	1.34	8.8 — 8.9 1	11475 = Fox 83	534	33.5	0.46	9.5 — 9.9 2
	218	2.8	1.29	8.6 — 8.8 1					

Résidus	Ephéméride	Orbite
1 +0.50, —0.02	J.O.V36, No 6—7, 1953	Suppl.
—0.63, —0.19		
2 —0.60, +0.04	J.O.V36, No 6—7, 1953	Van den Bos
3 —0.60, —0.03		
—2.20, —0.01	Circ. d'In., No 5,	Wierzb.

Résidus	Ephéméride	Orbite
4 —2.0, —0.08	J.O.V36, No 6—7, 1953	Hopmann, 1945
—3.4, +0.07		
5 +1.0, +0.05	J.O.V36, No 6—7, 1953	Suppl.
6 —1.5, —0.18	J.O.V36, No 6—7, 1953	Suppl.

* Appreciation visuelle

OBSERVATIONS À LA LUNETTE ZÉNITHALE

(de 110 mm) du Service de latitude de l'Observatoire

par B. ŠEVARLIĆ (BS), G. TELEKI (GT), Z. PETOVIĆ (ZP), et M. DJOKIĆ (MD)

$$\varphi = + 44^{\circ} 48' +$$

III								IV							
1959 JANV. 1 BS	14	15	16	17	18	19		20	21	22	23	24	25	26	
	—	10.838	10.757	10.102	10.692	10.466		10.048	10.663	10.139	9.794	10.331	10.299	—	
IV								V							
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	
11 BS	10.388	10.256	9.919	9.990	10.239	10.458	9.936	10.264	9.744	9.979	10.083	10.213	10.034	10.594	
13 GT	9.974	10.325	9.911	10.189	10.192	10.679	9.904	10.035	9.937	9.779	10.202	9.910	9.559	10.429	
18 GT	10.123	10.005	10.130	9.743	9.947	9.977	—	10.231	9.831	9.726	10.055	10.020	9.977	10.110	
21 BS	10.419	10.375	10.310	10.203	10.265	10.271	9.901	9.942	—	10.019	10.366	10.211	10.403	10.155	
V								VI							
	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
FÉVR.	9.914	9.925	9.917	10.189	10.240	10.235	10.469	9.997	9.972	—	—	—	—	—	
8 GT	9.950	10.014	9.949	10.241	9.704	9.620	9.650	9.948	10.075	9.736	10.452	10.525	—	10.932	
12 GT	10.021	9.935	9.926	10.173	9.876	9.805	9.854	9.799	9.636	10.070	9.543	9.693	9.532	10.435	
15 BS	10.033	9.964	9.977	10.235	10.366	10.352	10.098	10.345	10.497	10.156	9.961	10.249	10.480	10.538	
25 BS	—	10.304	10.701	10.034	10.486	10.270	10.706	10.518	10.265	10.269	10.101	10.002	10.345	10.893	
26 GT	10.581	10.531	10.144	10.392	10.530	10.538	10.351	—	10.084	10.204	10.236	9.974	10.294	—	
28 GT	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
MARS	—	10.003	9.934	9.887	10.256	10.207	9.943	10.395	10.245	10.290	9.791	10.295	9.641	10.089	
2 BS	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
VI								VII							
	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	
20 BS	9.781	9.553	9.739	9.268	9.618	9.526	10.089	9.962	9.591	9.608	9.810	9.594	9.600	9.623	
22 GT	9.812	10.124	9.769	9.939	10.117	10.601	10.934	10.046	10.093	9.847	10.328	9.755	10.247	9.828	
AVR.	—	10.274	10.240	10.671	10.053	9.758	10.317	—	10.491	9.825	—	—	—	9.805	
3 MD	—	—	—	9.973	9.920	10.339	10.320	9.753	10.177	9.776	10.257	9.969	9.970	9.621	
4 GT	9.784	10.138	9.953	9.710	9.673	9.669	10.605	9.737	9.763	9.701	10.212	9.747	9.784	9.613	
5 BS	10.165	9.694	—	—	—	—	—	—	—	9.409	—	10.009	10.344	10.030	
6 MD	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
VII								VIII							
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	
8 MD	9.920	—	9.860	10.637	9.950	10.200	10.425	—	9.974	10.661	—	—	—	—	
13 MD	9.498	9.970	9.893	10.259	10.662	9.684	9.993	—	9.528	—	10.563	10.537	10.104	10.204	
25 MD	10.168	10.384	10.274	10.652	—	—	—	10.370	—	10.089	9.815	—	10.045	10.265	
28 MD	—	9.779	9.733	—	—	9.892	10.376	10.043	9.812	—	9.989	—	—	—	
29 BS	9.892	9.745	9.759	10.047	9.695	9.859	9.665	9.876	9.923	9.919	9.958	9.856	9.900	10.039	
30 MD	10.289	10.260	10.269	—	—	10.370	10.354	10.250	9.859	9.606	—	10.004	9.976	10.223	
MAI	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	
4 GT	9.850	10.082	10.101	10.244	9.886	10.424	9.650	10.242	9.543	9.675	9.486	9.784	10.056	10.082	
5 MD	—	9.823	10.124	—	—	—	—	—	—	—	10.401	10.544	10.179	10.201	
VIII								IX							
	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	
8 ZP	9.866	10.243	10.073	9.851	10.007	—	10.045	9.785	10.005	10.263	9.718	9.810	9.775	—	
20 BS	9.862	10.151	10.332	9.744	9.891	9.808	10.079	10.112	10.004	10.073	9.687	9.966	9.794	10.108	
25 ZP	9.984	9.984	10.187	9.901	9.853	9.679	9.619	9.530	10.138	10.025	9.964	9.916	9.851	9.961	
26 MD	9.921	10.151	10.073	9.791	10.250	9.965	9.959	9.559	9.964	10.114	9.557	9.604	9.746	—	
28 MD	—	9.915	—	—	9.636	9.704	9.765	9.969	10.050	10.524	9.774	10.413	10.181	9.857	

J A N V I E R									F É V R I E R								
TQC ₉	TQG ₅	GPB ₃₀	RWM	TQG ₅	RWM	$\Delta\lambda$	ΔT_s	TU_2-TU_0	TQC ₉	TQG ₅	GPB ₃₀	RWM	TQG ₅	RWM	$\Delta\lambda$	ΔT_s	TU_2-TU_0
27.84	21.62	29.03	20.16	21.62	55.76				27.84	21.62	29.03	20.16	21.62	55.76			
8 ^h 6 ^m	9 ^h 36 ^m	10 ^h 0 ^m	12 ^h 6 ^m	13 ^h 6 ^m	20 ^h 6 ^m				8 ^h 6 ^m	9 ^h 36 ^m	10 ^h 0 ^m	12 ^h 6 ^m	13 ^h 6 ^m	20 ^h 6 ^m			
						en	10 ⁻³								en	10 ⁻³	
1 964	973	966	953	967	937	+17	-11	+ 6	997	993	978	000	003	987	+18	- 7	+11
2 963	971	967	951	970	944	17	11	6	009	005	994	011	009	992	18	6	12
3 977	982	987	983	972	—	17	11	6	012	008	990	013	013	010	18	6	12
4 981	980	978	966	974	958	17	10	7	019	013	992	021	016	014	18	6	12
5 978	980	979	969	980	961	17	10	7	019	021	995	025	017	013	18	6	12
6 984	983	992	975	980	948	17	10	7	021	024	995	025	018	012	18	6	12
7 974	971	—	963	971	955	17	10	7	018	024	—	020	017	015	17	5	12
8 979	971	979	961	970	953	17	10	7	025	029	998	026	030	019	17	5	12
9 977	969	975	965	976	960	17	10	7	035	032	—	031	030	025	17	5	12
10 980	981	976	967	983	964	17	10	7	037	029	006	030	028	013	17	5	12
11 977	977	971	970	980	—	17	10	7	030	024	993	020	027	009	17	5	12
12 977	977	974	961	982	959	17	10	7	025	026	990	014	022	—	17	4	13
13 971	971	968	954	973	959	17	9	8	015	016	982	008	011	989	17	4	13
14 966	966	959	949	968	936	17	9	8	006	000	973	—	002	975	17	4	13
15 960	964	—	953	964	939	17	9	8	984	979	949	980	980	953	17	4	13
16 961	966	—	945	965	941	17	9	8	971	959	943	956	965	944	16	3	13
17 966	970	959	952	975	940	18	9	9	957	956	947	954	963	948	16	3	13
18 974	972	959	957	974	—	18	9	9	962	972	942	959	968	955	16	3	13
19 963	962	947	944	964	932	18	9	9	981	978	952	967	980	967	16	2	14
20 948	946	937	929	954	920	18	9	9	990	994	968	975	989	976	16	2	14
21 956	952	941	939	956	926	18	8	10	993	992	969	980	996	978	16	2	14
22 962	958	945	944	966	938	18	8	10	996	996	971	985	000	982	16	2	14
23 973	970	951	956	971	953	18	8	10	012	011	985	993	012	995	16	1	15
24 983	978	960	964	977	953	18	8	10	017	016	991	004	013	994	16	1	15
25 981	984	—	965	981	958	18	8	10	006	010	978	992	999	972	16	— 1	15
26 979	973	965	971	977	955	18	8	10	981	982	960	966	975	961	15	0	15
27 979	979	965	972	978	960	18	7	11	964	964	944	954	932	947	15	0	15
28 984	979	960	977	982	970	18	7	11	964	966	949	959	973	957	+15	+ 1	+16
29 976	980	964	979	982	971	18	7	11									
30 976	972	966	976	982	971	18	7	11									
31 986	981	969	985	993	981	+18	- 7	+11									

LUNAR OCCULTATIONS, 1961

occultations visible at Belgrade

Date		Star Z. C. No	Mag.	Ph.	Age of Moon d	U. T.		a	b	P
month	day					h	m	m	m	
1	04	1284	6.3	2	16.7	4	17.9	-0.7	-1.7	282
1	24	453	7.3	1	7.9	17	33.1	—	—	128
1	26	608	6.0	1	9.1	0	18.7	-0.1	-1.0	77
1	27	741	5.7	1	10.1	0	16.9	-0.8	+0.4	39
2	02	1550	5.8	2	17.0	20	00.4	-0.7	-0.1	312
2	05	1869	6.1	2	20.1	22	59.6	-0.8	+0.4	299
2	06	1875	6.5	2	20.2	1	06.1	-1.2	-0.9	319
2	07	1994	6.5	2	21.2	2	51.4	-1.9	0.0	280
2	17	15	7.3	1	2.3	16	49.0	-1.3	-4.1	130
2	21	526	6.9	1	6.4	16	56.8	-1.5	-2.1	36
2	22	677	4.8	1	7.4	16	48.9	-1.7	+2.0	47
2	22	680	6.7	1	7.4	16	52.0	-1.8	+1.3	61
2	22	685	6.5	1	7.4	18	55.0	-1.7	+0.8	52
2	24	951	6.8	1	9.5	18	48.4	-2.0	+0.2	82
2	26	1210	5.9	1	11.6	22	59.0	-0.4	-3.7	155
3	19	368	6.3	1	3.0	18	54.6	-0.3	+0.1	43
3	21	626	6.4	1	5.0	19	25.1	-0.5	-1.8	104
3	24	1057	6.9	1	8.1	23	11.1	—	—	167
3	26	1284	6.3	1	10.2	23	16.1	-0.5	-1.7	104
3	27	1386	6.6	1	11.1	21	13.6	-1.3	-2.1	127
3	30	1600	5.1	1	13.2	0	16.0	-0.5	-2.7	153
4	06	2441	6.5	2	20.3	0	45.4	-1.1	-0.1	310
4	18	692	1.1	1	3.3	12	25.9	-1.6	+1.6	60
4	18	692	1.1	2	3.3	13	47.0	-2.0	-0.3	272
4	22	1238	6.1	1	7.6	19	17.1	-1.3	-1.5	101
4	22	1247	6.8	1	7.7	22	48.3	0.0	-1.5	99
5	02	2399	5.0	2	17.8	23	33.3	—	—	350
5	17	943	6.2	1	3.1	19	27.9	-0.6	+0.7	32
5	21	1413	6.7	1	7.1	20	22.7	-0.5	-2.0	116
5	24	1732	7.0	1	10.2	22	43.4	-0.8	-1.3	79
5	26	1941	4.8	1	12.1	19	59.6	-1.4	-1.3	135
6	12	692	1.1	1	28.5	3	45.8	+0.7	+3.0	17
6	12	692	1.1	2	28.5	4	15.8	-0.7	+0.1	314
6	23	2020	6.6	1	10.7	22	31.3	-0.8	-1.8	115
7	04	3526	5.1	2	20.9	1	18.1	—	—	318
7	09	635	3.9	1	25.9	1	57.2	+0.2	+1.9	52
7	09	692	1.1	1	26.2	11	41.9	-1.0	-0.9	78
7	09	692	1.1	2	26.2	12	50.5	-0.5	-1.4	271
7	23	2352	6.7	1	11.0	20	26.1	-1.8	+0.2	56
7	29	3173	5.3	2	16.2	1	27.5	-1.8	-1.1	283
8	01	76	5.9	2	19.3	2	05.3	-2.0	+0.1	275
8	06	741	5.7	2	24.3	1	47.9	-1.3	-0.4	317
8	15	1821	2.9	1	4.3	17	56.5	-0.7	-1.8	106
8	18	2158	7.3	1	7.3	18	17.2	-1.5	-1.2	97
8	20	2441	6.5	1	9.4	21	14.9	—	—	27
8*	26	3267	7.2	1	14.6	1	59.5	-0.6	-0.1	52
9	01	699	5.8	2	21.6	23	17.0	+0.1	+2.3	222

Ph. 1 = Disappearance
2 = Reappearance

* Lunar Eclipse

Date		Star Z. C. No	Mag.	Ph.	Age of Moon	U. T.		a	b	P
month	day				d	h	m	m	m	°
9	15	2245	6.4	1	5.6	17	41.8	-1.2	-0.3	54
9	19	2854	7.3	1	9.6	17	20.8	-1.7	+ 1.4	44
9	20	3022	6.9	1	10.8	21	57.4	-1.4	- 1.4	102
9	21	3173	5.3	1	11.8	21	56.9	-1.0	+ 0.4	44
9	26	364	4.3	1	16.8	21	44.5	—	—	139
9	26	364	4.3	2	16.8	22	04.7	—	—	173
9	27	491	6.2	2	17.9	23	19.6	-1.2	+ 1.6	249
9	28	498	6.2	2	17.9	0	57.1	-1.0	+ 2.8	206
9	28	626	6.4	2	18.8	21	44.0	-0.5	+ 1.4	268
9	28	635	3.9	1	18.9	22	43.1	-0.7	+ 1.7	73
9	28	635	3.9	2	18.9	23	54.1	-1.1	+ 1.6	250
9	29	659	6.4	2	19.0	3	30.2	-1.7	+ 1.3	230
9	29	692	1.1	1	19.2	8	13.7	-0.4	- 0.6	61
9	29	692	1.1	2	19.2	9	06.3	+0.3	- 1.7	290
10	07	4002	-3.4	1	27.2	6	55.1	-1.8	- 0.1	114
10	07	4002	-3.4	2	27.2	8	34.7	-2.0	- 1.1	298
10	15	2639	6.0	1	5.9	16	59.7	-1.9	- 1.9	134
10	17	2959	7.2	1	8.0	19	00.7	-1.5	- 0.6	81
10	31	1262	6.2	2	21.3	1	01.7	-1.2	+ 0.7	287
10	31	1371	6.4	2	22.2	23	28.9	-0.4	+ 0.2	310
11	01	1375	5.6	2	22.3	0	58.9	-1.1	- 0.9	325
11	11	2591	6.5	1	3.3	16	32.6	-1.2	- 1.8	116
11	12	2757	5.1	1	4.2	15	57.5	—	—	158
11	12	2760	6.7	1	4.2	16	01.6	-1.6	- 0.9	94
11	15	3222	7.1	1	7.4	20	37.2	-0.3	+ 0.4	36
11	16	3375	6.9	1	8.5	22	17.8	-0.7	- 1.6	97
11	18	83	6.9	1	10.3	16	01.0	-0.5	+ 2.5	23
11	18	95	7.1	1	10.4	20	13.2	-1.4	+ 0.8	53
11	19	249	4.7	1	11.5	22	12.7	—	—	1
11	20	364	4.3	1	12.4	17	06.5	—	—	139
11	21	405	4.4	1	12.7	2	48.5	-0.0	- 3.0	128
11	23	692	1.1	1	14.7	3	30.5	—	—	148
11	23	692	1.1	2	14.7	3	58.3	—	—	200
11	24	832	4.7	2	15.7	4	48.4	-0.3	- 1.8	286
11	24	947	5.2	2	16.5	21	28.2	-1.1	+ 1.2	270
11	27	1236	5.1	2	18.7	4	36.1	-1.6	- 1.1	272
12	01	1644	4.1	1	22.7	1	38.7	—	—	174
12	01	1644	4.1	2	22.7	2	14.4	—	—	230
12	02	1749	6.1	2	23.8	4	30.4	-1.9	+ 0.5	278
12	11	3017	5.3	1	3.7	15	35.9	-1.7	- 1.0	100
12	12	3177	6.0	1	4.7	18	22.9	+0.1	+ 1.4	16
12	12	3181	5.9	1	4.8	18	29.7	-1.3	- 2.2	114
12	15	62	7.5	1	7.8	19	39.7	-0.4	+ 2.3	12
12	18	453	7.3	1	10.8	17	36.5	-0.9	+ 2.2	42
12	18	462	5.9	1	10.9	20	13.5	-2.1	- 0.4	95
12	23	1175	5.0	2	16.0	23	56.5	-2.1	+ 1.6	242
12	26	4007	5.7	2	19.0	22	09.6	-0.8	- 0.1	312

Ph. 1 = Disappearance

2 = Reappearance

SUR LES PETITES PLANÈTES DOUBLEMENT DÉSIGNÉES

par R. S. MITRINOVIC

Aux cours des dernières années on a vu paraître un certain nombre des petites planètes doublement désignées. L'identification de ces objets étant certainement faite à simple vue, puisque souvent il s'agissait des petites planètes redécouvertes aux cours d'une même opposition, nous avons pensés qu'il serait intéressant de vérifier ces identités. Dans la suite nous exposerons donc les résultats de nos recherches concernant les planètes découvertes en 1955 aux Observatoires de Link et de Heidelberg.

La voie que nous avons suivie était celle d'une orbite circulaire calculée d'après la méthode proposée par M. Protitch. Les éléments Ω , i , r , obtenues de cette manière sont, bien entendu, un peu grossiers, mais néanmoins il suffisent pour indiquer la possibilité d'une identification raisonnable.

Le présent article est divisé en deux parties: la première partie contient les éléments circulaires des petites planètes considérées, tandis que dans la seconde partie on trouve les conclusions qui s'en déduisent.

I

N ^o	Planète	Époque 0 ^h . 0 U.T.	1	1950.0 Ω	i	$\frac{dl}{dt}$	r	Opposition en λ	m
1	1955 QO	1955—VIII —23	325.7	253.6	8.7	0.2568	2.461	1955—VIII—18	16.4
	1955 RB	—IX —13	326.9	229.7	9.5	0.1322	3.797	—VIII—17	16.2
	1955 SP ₁	—IX —19	332.1	240.5	8.6	0.2390	2.576	—VIII—18	16.9
2	1955 QN	1955—VIII —23	326.5	246.8	6.6	0.3375	2.060	1955—VIII—19	17.2
	1955 RC	—IX —13	333.7	264.4	7.2	0.3292	2.061	—VIII—19	16.4
	1955 RC	—IX —19	335.7	290.4	9.5	0.3558	2.061	—VIII—18	17.1
3	1955 SF	1955—IX —16	5.1	343.4	6.8	0.3421	2.027	1955—X — 6	17.5
	1955 SF	—IX —17	8.5	353.1	11.7	0.2207	2.717	—X — 7	17.0
	1955 TK	—X —11	14.1	345.6	6.9	0.3552	2.042	—X — 6	17.4
4	1955 RF ₁	1955—IX —14	5.4	307.1	5.0	0.2292	2.647	1955—X — 4	15.9
	1955 SG ₂	—IX —23	7.9	333.2	8.0	0.2070	2.847	—X — 4	14.4
	1955 TO	—X —11	12.5	322.5	5.3	0.3147	2.152	—X — 4	16.5
5	1955 SU	1955—IX —17	5.0	267.8	3.2	0.2907	2.259	1955—X — 4	17.2
	1955 TN	—X —11	12.2	241.3	3.8	0.3139	2.156	—X — 4	17.0
	1955 UC	—X —20	13.3	219.6	7.1	0.2128	2.786	—X — 4	17.4
6	1955 QE	1955—VIII —20	323.0	327.6	14.2	0.3891	1.869	1955—VIII—14	14.6
	1955 RD	—IX —13	332.4	326.8	15.1	0.3320	2.068	—VIII—17	14.3
	1955 SM ₁	—IX —19	334.8	326.6	11.4	0.4929	2.065	—VIII— 7	15.5
7	1955 QW	1955—VIII —24	349.0	315.4	22.3	0.2155	2.550	1955—IX —18	16.5
	1955 SD	—IX —16	355.3	315.6	23.2	0.2242	2.717	—IX —20	16.3
8	1955 QR	1955—VIII —23	340.0	15.9	7.9	0.2355	2.600	1955—IX — 7	17.5
	1955 RJ	—IX —13	345.3	26.7	6.0	0.2931	2.254	—IX — 7	17.5
	1955 RK	—IX —13	345.1	116.1	5.6	0.2922	2.256	—IX — 6	17.6
9	1955 QT	1955—VIII —23	335.5	119.7	3.0	0.4129	1.790	1955—IX — 3	15.9
	1955 RP	—IX —13	343.2	110.9	3.4	0.2878	2.277	—IX — 4	16.0
10	1955 QP ₁	1955—VIII —23	342.8	259.1	2.4	0.3429	2.023	1955—IX —14	14.0
	1955 SE	—IX —16	351.4	245.6	2.4	0.3998	1.863	—IX —14	16.7
11	1955 SZ ₁	1955—IX —20	9.2	195.2	13.6	0.1417	3.634	1955—X — 5	14.6
	1955 UA	—X —20	12.1	2.6	10.2	0.0930	4.822	—X — 4	17.6
12	1955 QU	1955—VIII —23	338.7	19.9	5.4	0.2418	2.551	1955—IX — 5	17.0
	1955 RM	—IX —13	343.3	142.4	10.8	0.2268	2.672	—IX — 4	17.7
13	1955 UP ₁	1955—X —19	33.7	26.9	21.9	0.2317	2.628	1955—X —30	14.4
	1955 UN ₁	—X —25	33.7	20.7	10.2	0.4282	1.745	—X —30	15.6
14	1955 RS	1955—IX —18	4.5	18.7	8.4	0.3994	1.829	1955—X — 5	15.7
	1955 SC ₂	—IX —20	4.6	20.5	6.7	0.4363	1.723	—X — 5	14.2
15	1955 SD ₁	1955—IX —18	14.4	62.8	2.6	0.2783	2.300	1955—X —16	17.0
	1955 UH	—X —10	16.5	55.4	2.7	0.3227	2.319	—X —11	16.5
	1955 UH	—X —20	23.3	155.4	1.8	0.2871	2.319	—X —16	16.4
16	1955 RZ	1955—IX —14	3.1	295.3	9.4	0.2471	2.522	1955—X — 1	17.4
	1955 RZ	—IX —21	4.9	305.4	10.3	0.2432	2.552	—X — 1	16.6
	1955 TP	—X —12	9.6	319.7	12.4	0.2156	2.772	—X — 1	17.4
17	1955 RE	1955—IX —13	327.8	331.2	14.3	0.2119	2.795	1955—VIII—15	16.9
	1955 SN ₁	—IX —19	329.3	332.1	10.9	0.2071	2.795	—VIII—16	18.0
18	1955 SL ₂	1955—IX —24	16.3	48.2	4.2	0.1802	3.116	1955—X —14	14.6
	1955 VG	—XI —10	23.1	104.0	3.1	0.0897	4.952	—X —15	16.1
19	1955 ST	1955—IX —17	4.9	189.1	9.4	0.2499	2.500	1955—X — 3	15.3
	1955 UB	—X —20	12.0	188.7	13.4	0.1752	3.172	—X — 3	14.8

N°	Planète	Époque 0 ^h . 0 U.T.	l	1950 . 0 Ω	i	$\frac{dl}{dt}$	r	Opposition en λ	m
20	1955 SG ₁	1955—IX —18	13.6	212.0	3.8	0.2626	2.419	1955—X —15	17.2
	1955 UN	—X —20	22.3	355.5	2.6	0.2236	2.762	—X —15	16.0
	1955 UN	—XI —10	25.2	346.2	2.4	0.1594	3.368	—X —15	16.1
21	1955 SY ₁	1955—IX —21	1.6	287.9	6.6	0.3041	2.195	1955—IX —27	16.0
	1955 TF	—X —12	6.5	336.6	16.5	0.1828	3.084	—IX —27	17.0
22	1955 SJ ₂	1955—IX —24	15.7	190.6	3.7	0.2180	2.741	1955—X —14	14.4
	1955 VF	—XI —10	29.5	22.5	2.9	0.3423	2.027	—X —15	16.4
23	1955 RX	1955—IX —13	2.0	175.9	3.3	0.3936	1.846	1955—X —4	17.0
	1955 SA ₂	—IX —21	7.2	180.4	5.9	0.2856	2.289	—X —5	14.2
24	1955 SH ₁	1955—IX —18	16.0	21.9	9.8	0.1758	2.995	1955—X —15	16.6
	1955 SH ₂	—IX —24	17.1	36.9	2.5	0.1908	2.995	—X —15	14.3
25	1955 UV	1955—X —20	22.3	225.9	0.3	0.2401	2.648	1955—X —15	17.3
	1955 UV?	—XI —10	27.3	206.6	4.1	0.2510	2.490	—X —15	16.4
26	1955 YC	1955—XII —20	105.2	274.1	2.2	0.2495	2.500	1956—I —12	14.2
	1955 YC	1956—I —8	110.4	142.3	0.4	0.2342	2.612	—I —12	13.9
27	1955 YD	1955—XII —20	103.0	114.5	2.5	0.3794	1.892	1956—I —13	14.4
	1955 YD	1956—I —8	112.0	284.0	9.9	0.2021	2.892	—I —14	14.5
28	1955 YE	1955—XII —20	106.5	162.9	1.2	0.2716	2.293	1956—I —14	14.0
	1955 YE	1956—I —8	111.3	267.0	6.8	0.2979	2.240	—I —14	14.1
29	1955 RC ₁	1955—IX —14	1.3	291.9	9.5	0.2202	2.719	1955—IX —28	15.8
	1955 RC ₁ ?	1955—X —12	7.4	282.7	9.2	0.2056	2.852	—IX —28	16.9
30	1955 QF ₁	1955—VIII —25	334.5	2.7	8.8	0.2858	2.297	1955—VIII —30	16.5
	1955 QF ₁	—VIII —25	334.7	24.5	5.8	0.2466	2.527	—VIII —30	17.4
31	1955 XP	1955—XII —12	89.1	332.8	3.9	0.4487	1.698	1955—XII —29	15.9
	1955 XP?	1956—I —13	101.0	339.0	5.6	0.2499	2.499	—XII —29	15.5

II

1) 1955 QO = 1955 SP₁ ≠ 1955 RB (MPC—1311, 1312, 1315).

La petite planète 1955 RB a, si $r = 2.461$, les valeurs suivantes pour le noeud Ω et l'inclinaison i : $\Omega = 254^\circ.6$, $i = 7^\circ.97$.

En ce qui concerne la planète 1955 SP₁ on a: $\Omega = 256^\circ.6$, $i = 8^\circ.6$, pour $r = 2.461$.

2) 1955 QN ≠ 1955 RC (13-VIII) ≠ 1955 RC (19-VIII) (MPC—1311, 1312, 1315).

Pour le 13 et 19 août, l'auteur a pris $r = 2.061$, ce qui est hypothétique. Les calculs montrent que les trois objets en question sont différents.

3) 1955 TK = 1955 SF (16-IX) ≠ 1955 SF (17-IX) (MPC—1314, 1316).

4) 1955 RF₁ ≠ 1955 SG₂ ≠ 1955 TO (MPC—1313, 1316, 1338).

Par l'examen l'auteur n'a pas pu décider que les trois objets en question sont identiques. Il faudra de nouveau mesurer les positions de ces petites planètes.

5) 1955 SU ≠ 1955 TN ≠ 1955 UC (MPC—1314, 1316, 1317).

L'examen effectué n'a pas donné la possibilité de décider si l'identité existe. Il faudra de nouveau mesurer les positions de ces petites planètes.

6) 1955 QE = 1955 RD ≠ 1955 SM₁ (MPC—1311, 1312, 1315).

Pour la petite planète 1955 SM₁ l'auteur a pris, hypothétiquement, $r = 2.065$, car cette planète a été observée 6 jours après la découverte de la petite planète 1955 RD. A cause de l'opposition lointaine la valeur exacte de r n'a pas pu être calculée.

7) 1955 QW = 1955 SD (MPC—1312, 1313).

L'orbite circulaire est calculée pour la petite planète 1955 QW pour $r = 2.550$, cette valeur étant hypothétique.

8) 1955 QR = 1955 RJ ≠ 1955 RK (MPC—1311, 1313).

Pour la petite planète, la valeur de r hypothétique étant 2.180 , on obtient: $\Omega = 20^\circ.9$, $i = 6^\circ.1$.

9) 1955 QT ≠ 1955 RP (MPC—1312, 1313).

Par l'examen l'auteur a décidé que les deux objets dont il s'agit ne sont pas identiques.

10) 1955 QP₁ = 1955 SE (MPC—1313, 1338).

- 11) 1955 SZ₁ ≠ 1955 UA (MPC—1316, 1338).
 12) 1955 QU ≠ 1955 RM (MPC—1312, 1313).
 13) Les positions de ces deux petite planètes sont les suivantes:

		α (1950.0)	δ (1950.0)	$d\alpha$	$d\delta$
1955 UP ₁	1955-X-19.02137	2 ^h 21 ^m 2 ^s .00	+18° 36'	-0 ^m .8	+6' Uccle
1955 UN ₁	1955-X-25.29	2 13.2	+19 6	-1.3	+5 Link

Ces deux petite planète peut-être sont identiques. Le soupçon est due à $d\alpha$ qui est très petit, à savoir -0^m.8.

Cependant, en calculant pour la petite planète 1955 UP₁ les nouveaux éléments, à partir de r (= 1.930) hypothétique, on trouve que les noeuds et les inclinaisons des petites planètes 1955 UP₁ et 1955 UN₁ son presque égaux. Pour la petite planète 1955 UP₁ on a: $\Omega = 20^\circ \cdot 1$, $i = 10^\circ \cdot 9$.

Par suite, on a

$$1955 UN_1 = 1955 UP_1 \text{ (MPC—1317, 1354).}$$

- 14) 1955 RS = 1955 SC₂ (MPC—1314, 1338).

A $r = 1.723$ hypothétique correspond: $\Omega = 19^\circ \cdot 1$, $i = 7^\circ \cdot 2$ pour la petite planète 1955 RS.

- 15) 1955 SD₁ ≠ 1955 UH (10-X) ≠ 1955 UH (20-X) (MPC—1315, 1317, 1351).

Par l'examen l'auteur a constaté que les trois objets en question sont différents.

- 16) 1955 RZ (14-IX) = 1955 RZ (21-IX) ≠ 1955 TP (MPC—1313, 1315, 1316).

Par l'examen l'auteur a trouvé que les deux objets dont il s'agit sont différents. Cependant, avec r (= 2.772) hypothétique on pourrait supposer: 1955 RZ (14-IX) = 1955 RZ (21-IX).

- 17) 1955 RE = 1955 SN₁ ?? (MPC—1312, 1315).

La petite planète 1955 SN₁ a pour $r = 3.000$ qui est hypothétique, les valeurs suivantes: $\Omega = 330^\circ \cdot 9$ et $i = 12^\circ \cdot 6$. La première planète 1955 RE a été observée 29 jours après opposition, et la seconde 1955 SN₁, 34 jours également après opposition.

- 18) 1955 SL₂ ≠ 1955 VG (MPC—1338, 1351).

- 19) 1955 ST = 1955 UB (MPC—1314, 1317).

L'identité est établie à partir des données suivantes relatives à la petite planète 1955 ST: $r = 2.869$, $\Omega = 189^\circ \cdot 1$, $i = 13^\circ \cdot 0$.

- 20) 1955 SG₁ ≠ 1955 UN (20-X) = 1955 UN (10-XI) (MPC—1315, 1317, 1351).

- 21) 1955 SY₁ ≠ 1955 TF (MPC—1316).

- 22) 1955 SJ₂ ≠ 1955 VF (MPC—1338, 1351).

- 23) 1955 RX = 1955 SA₂ (MPC—1313, 1338).

A r (= 2.289) hypothétique, on obtient $\Omega = 180^\circ \cdot 6$, $i = 5^\circ \cdot 75$, pour la petite planète 1955 RX.

- 24) L'intervalle de temps de l'observation des petites planètes 1955 SH₁ et 1955 SH₂ étant court, l'orbite de la petite planète 1955 SH₁ est calculée en supposant que la valeur de r des petites planètes 1955 SH₁ et 1955 SH₂ sont approximativement égaux.

Le fait que les éléments des petites planètes 1955 SH₁ et 1955 VF étant presque égaux est suscité des examens. Dans le cas $r = 1.800$ (pour 1955 SH₁) on obtient $\Omega = 21^\circ \cdot 4$, $i = 3^\circ \cdot 2$. On en déduit

$$1955 SH_1 \neq 1955 SH_2 \text{ et}$$

$$1955 SH_1 = 1955 VF \text{ (MPC—1315, 1338).}$$

- 25) 1955 UV (20-X) ≠ 1955 UV? (10-XI) (MPC—1317, 1351).

$$1955 UV? (10-XI) = 1955 SG_1?$$

La petite planète 1955 UV? (10-XI), a, si $r = 2.200$ les valeurs suivantes: $\Omega = 208^\circ \cdot 1$, $i = 3^\circ \cdot 1$.

- 26) 1955 YC (20-XII) ≠ 1955 YC (8-I-1956) (MPC—1339, 1416).

- 27) 1955 YD (20-XII) ≠ 1955 YD (8-I-1956) (MPC—1339, 1416).

- 28) 1955 YE (20-XII) ≠ 1955 YE (8-I-1956) (MPC—1339, 1416).

- 29) 1955 RC₁ (14-IX) = 1955 RC₁? (12-X)? (MPC—1313, 1316).

L'identité est soupçonneuse.

- 30) 1955 QF₁ (25.27-VIII) ≠ 1955 QF₁ (25.34-VIII) (MPC—1312).

- 31) 1955 XP (12-XII) = 1955 XP (13-I-1956)? (MPC—1352, 1397).

Pour la petite planète 1955 XP (12-XII), l'auteur a pris $r = 2.499$ et alors les valeurs pour le noeud (Ω) et l'inclinaison (i) sont:

$$\Omega = 334^\circ.0, \quad i = 5^\circ.7.$$

Remarque. Pour les petites planètes (1955 QW, 1955 RC_(13-IX) et 1955 RC_(19-IX), 1955 SD₁ et 1955 UH_(10-X), 1955 SH₁, 1955 SM₁, 1955 SN₁, 1955 YE_(20-XII)) traitées dans cet article, l'élément r n'a pas pu être calculé. C'est pourquoi, l'élément r est pris égal ou approximativement égal à l'élément r correspondant à la petite planète avec laquelle on a tenté d'établir l'identité.

LITTÉRATURE

1. M. B. Protitch, Sur la détermination de l'orbite circulaire d'après une position observée et le mouvement diurne. *Mémoires*, V, 1949, p. 27—52, Publications de l'Observatoire astronomique de Belgrade.
2. *Minor Planet Circulars* № 1410, 1452, 1453. (Cincinnati, Ohio, USA).

IDENTIFICATIONS, DOUBLE DESIGNATIONS, CIRCULAR AND ELLIPTIC ELEMENTS OF MINOR PLANETS

by R. S. MITRINOVIĆ

1958 GR (MPC 1846) = (1606) 1950 RH

The elements of (1606) (1950 RH), with $\Delta M = +0^\circ.500$ produce the residuals

Date	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1958 Apr. 13	$\div 0.3^m$	$\div 4'$
1958 Apr. 15	$\div 0.2$	$\div 5$

1958 GN (MPC 1779) = 1958 FK (MPC 1722)?

Circular Elements:

Planet	Epoch 0h U.T	Equinox 1950.0		i	μ	a	Observations		
		u_0	Ω						
1957 OQ	57 July 25	227.337	75.907	5.836	0.24894	2.5053	July	24,	27
1958 CA	58 Feb. 16	70.913	61.285	5.587	0.28963	2.2628	Feb.	11,	16
1958 FK =	58 Apr. 8	176.531	11.634	15.745	0.20686	2.8320	Mar.	24,	Apr. 8
1958 GN?									
1958 RD	58 Oct. 8	10.949	350.667	9.404	0.21257	2.7807	Sep.	13,	Oct. 8

Elliptic Elements of 1956 GN:

Epoch: 1956 Apr. 18.0 U. T.

M = 176.96	220	1950.0	$\varphi = 5.71$	342
$\omega = 154.91$	363		$\mu = 0.1861054$	
$\Omega = 230.63$	501		$a = 3.03$	830
$i = 13.09$	809		$g = 10.3^m$	
$P_x = + 0.89$	369		$Q_x = - 0.41$	306
$P_y = + 0.36$	385		$Q_y = + 0.89$	568
$P_z = + 0.26$	253		$Q_z = + 0.16$	473

These elements are based on the positions of 1956 Apr. 8, 18 and May 2 (MPC 1732/33).

Residuals: 1956 Apr. 12: $\Delta\alpha = -0.05$ $\Delta\delta = -1.6$ (MPC 1873, 1898).

KALKULADO DE PLANED — KAJ KOMETEFEMERIDOJ SENPERE EL ILIAJ POZICIO KAJ RAPIDO

de B. POPOVIĆ, Sarajevo

En ĉiuj Laplace-tipaj metodoj, por eltrovado de planedeta aŭ kometa orbito, oni kalkulas la suncentraĵan pozicion $\mathbf{r}$ kaj rapidon $\mathbf{v}$ en difinita momento (t_0). Poste oni utiligas ilin por eltrovi la elementojn; precipe simple oni eltrovas la *vektorajn elementojn*: la direktita sektorrapido

$$(0, 1) \quad \mathbf{c} = [\mathbf{r} \mathbf{v}],$$

la perihelia vektoro

$$(0, 2) \quad \mathbf{e} = [\mathbf{v}\mathbf{c}] - \frac{\mathbf{r}}{r}$$

kaj la perihelia tempo T (v. ekz. [3], p. 17). Nur post tio el la elementoj estas kalkulataj efemeridoj por iu alia momento, ĉe kio denove estas plej konvenaj (pro maŝina kalkulado) la menciitaj vektoraj elementoj, ĉar novan pozicion oni trovas el la malnova per la esprimo

$$(0, 3) \quad \mathbf{r}_t = a(\cos u - e) \cdot \frac{\mathbf{e}}{e} + b \sin u \cdot \frac{[\mathbf{c}\mathbf{e}]}{ce},$$

kie a, b, u , estas donitaj per la egalajoj

$$(0, 4) \quad c^2 = a(1 - e^2), \quad b^2 = a^2(1 - e^2),$$

$$(0, 5) \quad u - e \sin u = \frac{1}{a/a} (t - T)$$

(Pli detale pri la rolo de la vektoraj elementoj v. ekz. [4], p. 99).

La ekaj pozicio kaj rapido povas esti utiligitaj ankaŭ kiel memstaraj, kaj pure vektoraj, elementoj por eltrovado de la efemeridoj surbaze de la formulo

$$(0, 6) \quad \mathbf{r}_t = f \cdot \mathbf{r} + g \cdot \mathbf{v},$$

kie la koeficientoj f, g dependas de $\mathbf{r}, \mathbf{v}, t$. Ĉi tio konvenas precipe por nelongaj tempintervaloj, ĉar tiam oni povas facile prezenti f, g en formo de rapide konverĝaj serioj; tiucele estas ja donitaj pluraj tabeloj (v. ekz. [5] kaj tie menciitajn verkojn). Same oni povas utiligi ilin por korekto de la antaŭe trovita orbito, kio parte aperas jam ĉe *Leuschner* [2] kaj ĉe liaj sekvintoj, sed strikte kaj simple estas efektivigita de la aŭtoro en [4], pp. 117-119. Estas ankaŭ kreita la metodo por orbiteltrovado el du pozicioj kaj la moviĝdirekto, utiliganta ĵus la kvantojn f, g [6].

Sed la ekaj pozicio kaj rapido povas esti uzataj ankaŭ plene kiel vektoraj orbitolementoj, t. e. per la formulo (0,6) kalkuli la efemeridojn ankaŭ post longaj tempintervaloj. Tiucele *K. Stumpff* [7] ellaboris tutan teorion por eltrovado de efemeridoj kaj donis ĝeneralan ekvacion, kiu anstataŭas la Kepleran ekvacion sed donas realajn solvojn por ĉiuspecaj (elipsa, parabola kaj hiperbola) moviĝoj kaj ebligas kalkuladon de la koeficientoj f, g en ĉiuj tiaj okazoj.

La celo de ĉi tiu verketo estas plisimpligi la procedojn por kalkulado de f, g forigante mankojn de la metodo de *Stumpff* kaj de la tabeloj el [5] (pri kiuj mankoj mi parolos sube). En la unua parto estos donita aliformigo de la „fundamenta ekvacio“ de *Stumpff*. En la dua parto estas montrita ĝia neutileco en la hiperbola kazo kaj donita la nova procedo por tia kazo, dume en la tria parto estas plisimpligita la procedo por elipsa kazo (kune kun nova seriigo de f, g). En la kvara parto estas pritraktita la kazo de preskaŭparabola moviĝo (utiligo de la ĝenerala ekvacio kaj la seriigo de f, g). Fine venas la konkludoj.

1) La ĝenerala (aliformigita Keplera) ekvacio

La „fundamenta ekvacio“ de *Stumpff* povas esti trovita tre simple el la Keplera ekvacio. Metu unue

$$(1, 1) \quad t - t_0 = \tau, \quad \frac{(u - u_0) r \sqrt{a}}{\tau} = z.$$

Tiam la Keplera ekvacio, aplikita dufoje, donas

$$u - u_0 - e(\sin u - \sin u_0) = \frac{\tau}{a \sqrt{a}}$$

$$(u - u_0) a \sqrt{a} = 1 + e \cdot \frac{a \sqrt{a}}{\tau} [\sin(u - u_0) \cos u_0 + \cos(u - u_0) \sin u_0 - \sin u_0].$$

Ĉi tio, konsiderinte

$$(1, 2) \quad r = a(1 - e \cos u_0),$$

fariĝas

$$\begin{aligned} z &= \frac{u - u_0}{\tau} a \sqrt{a} (1 - e \cos u_0) = \\ &= 1 - e \cos u_0 \cdot \frac{a \sqrt{a}}{\tau} [u - u_0 - \sin(u - u_0)] - \\ &- e \sin u_0 \cdot \frac{a \sqrt{a}}{\tau} [1 - \cos(u - u_0)]. \end{aligned}$$

Se ni plue signas, kun *Stumpff*:

$$(1, 3) \quad \frac{\sin \alpha}{\alpha} = c_1(\alpha), \quad \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha^2} = c_2(\alpha), \quad \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha^3} = c_3(\alpha),$$

kaj se ni konsideras la konatajn ligaĵojn (v. ekz. [4], p. 104, 105):

$$(1, 4) \quad (\mathbf{r}\mathbf{v}) = e \sqrt{a} \sin u_0, \quad r v^2 - 1 = e \cos u_0 = 1 - \frac{r}{a},$$

la lasta ekvacio prenas la formon

$$(1, 5) \quad z + c_2(\alpha) \eta_1 z^2 + c_3(\alpha) \zeta_1 z^3 = 1, \quad \alpha = u - u_0 = \frac{z \cdot \tau}{r \sqrt{a}},$$

kun

$$(1,6) \quad \eta_t = \frac{\tau \sqrt{a}}{r^2} e \sin u_o = \frac{\tau(\mathbf{rv})}{r^2},$$

$$\zeta_t = \frac{\tau^2}{r^3} e \cos u_o = \frac{\tau^2}{r^2} \left(v^2 - \frac{1}{r} \right).$$

Ĉi tio estas la „fundamenta ekvacio“ de Stumpf kaj ĝia solvo ebligas tuj trovi f, g , surbaze de

$$(1,7) \quad f = 1 - c_2(\alpha) \cdot \xi_t z^2, \quad g = \tau(1 - c_3 \xi_t z^3), \quad \xi_t = \frac{\tau^2}{r^3}.$$

La lastajn formulojn oni trovas el (0,3), post enigado de (0,1), (0,2), resp.

$$\mathbf{e} = \mathbf{r} \left(v^2 - \frac{1}{r} \right) - \mathbf{v}(\mathbf{rv})$$

$$[\mathbf{ce}] = \mathbf{v}(\mathbf{re}) - \mathbf{r}(\mathbf{ve}) = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{rv}}{r} + \mathbf{v}(c^2 - r),$$

de kie, per komparo kun (0,6) kaj utiligo de (1,2), (1,4), ni trovas

$$(1,8) \quad \begin{cases} f = (\cos u - e) \frac{\cos u_o}{1 - e \cos u_o} + \sin u \cdot \frac{\sin u_o}{1 - e \cos u_o} \\ g = -(\cos u - e) a \sqrt{a} \sin u_o + a \sqrt{a} \sin u (\cos u_o - e). \end{cases}$$

La unua esprimo tuj estiĝas

$$(1 - e \cos u_o) f = \cos(u - u_o) - e \cos u_o,$$

$$(1,9) \quad f = 1 - (1 - \cos(u - u_o)) \cdot \frac{a}{r},$$

kio, sekve de (1,3) kaj (1,2) donas la unuan esprimon (1,7). Kaj la dua esprimo (1,8), konsiderante ankoraŭ la Kepleran ekvacion, fariĝas

$$(1,10) \quad g/(a\sqrt{a}) = \sin(u - u_o) - e(\sin u - \sin u_o) = \sin(u - u_o) + \tau - (u - u_o),$$

kio tuj donas la duan esprimon (1,7).

La ĉefa avantaĝo de ĉi tiu Stumpf-metodo por eltrovado de efemeridoj estas ĝia ĉiama realeco kaj ĝeneraleco. Sed aliflanke la postulo pri realeco de la solvo en ĉiuj eblaj kazoj igas la procedon tre komplika en la kazoj kiam ni jam scias ke temas ĝuste pri elipsa, parabola (resp. preskaŭparabola) aŭ hiperbola moviĝo. En tiuj okazoj oni ne devas sklave sekvi la ĝeneralan procedon, sed doni kiom eble pli simplajn specialajn solvojn. Tio koncernas precipe la elipsan moviĝon, kun kiu ni renkontiĝas plej ofte.

Aliflanke la metodo de Stumpf estas tre mal-konvena pro apero de τ en la koeficientoj ξ_t, η_t, ζ_t , (1; 6, 7), kiujn pro tio oni devas kalkuli denove por ĉiu nova pozicio. Tio iom konvenas por negrandaj tempointervaloj, kiel faris ankaŭ la aŭtoro en [5] (kie τ estas eĉ apartiginta ankaŭ la koeficiento g , pro kio la signo g ĉi tie signifas la samon kiel τg en la verkaĵo [5]). Sed la Kepleran ekvacion oni povas aliformigi tiel ke la tempo troviĝas nenie en la koeficientoj, nur en la libera membro de la ekva-

cio. Tial ĉi tie, antaŭ ol transiri al specialaj kazoj, mi donos la aliformigon por ĝenerala kazo.

Por la nekonato prenu la kvanton

$$(1,11) \quad y = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\zeta}}, \quad (\alpha = u - u_o, \zeta = e \cos u_o = \mathbf{rv}^2 - 1).$$

Tiam el la Keplerana ekvacio (1,2) ni trovas

$$(1,12) \quad \alpha - e \sin \alpha \cos u_o + e \sin u_o (1 - \cos \alpha) = \frac{\tau}{r\sqrt{r}} (1 - \zeta) \sqrt{1 - \zeta}$$

$$\alpha (1 - \zeta) + \alpha^3 \zeta \cdot \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha^3} + e \sin u_o \alpha^2 c_2(\alpha) =$$

$$= \frac{\tau}{r\sqrt{r}} (1 - \zeta) \sqrt{1 - \zeta}$$

$$y + \frac{e \sin u_o}{\sqrt{1-\zeta}} y^2 c_2(\alpha) + \zeta y^3 c_3(\alpha) = \frac{\tau}{r\sqrt{r}}.$$

Se ankoraŭ, ligite kun (1,4), ni signos

$$(1,13) \quad \eta = \frac{e \sin u_o}{\sqrt{1-\zeta}} = \frac{e \sqrt{a} \sin u_o}{\sqrt{r}} = \frac{(\mathbf{rv})}{\sqrt{r}},$$

fine ni trovas

$$(1,14) \quad y + \tau y^2 c_2(\alpha) + \zeta y^3 c_3(\alpha) = \varepsilon,$$

$$(1,15) \quad \varepsilon = \frac{\tau}{r\sqrt{r}}, \quad \alpha = y \sqrt{1 - \zeta}.$$

Por f , el (1,9), ni havas

$$1 - f = c_2(\alpha) y^2 (1 - \zeta) \cdot \frac{1}{1 - \zeta},$$

do

$$(1,16) \quad f = 1 - y^2 c_2(y \sqrt{1 - \zeta}).$$

Samvoje el (1,10) ni trovas

$$\frac{g}{r\sqrt{r}} = \frac{\tau}{r\sqrt{r}} - \frac{a\sqrt{a}}{r\sqrt{r}} \cdot \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha^3} \cdot y^3 (1 - \zeta) \sqrt{1 - \zeta}$$

$$(1,17) \quad g = r\sqrt{r} [\varepsilon - y^3 c_3(\alpha)], \quad \alpha = y \sqrt{1 - \zeta},$$

do entute por kalkulado de efemeridoj

$$(1,18) \quad \mathbf{r}_t - [1 - y^2 c_2(y \sqrt{1 - \zeta})] \mathbf{r} + [\varepsilon - y^3 c_3(y \sqrt{1 - \zeta})] (r \sqrt{r} \cdot \mathbf{v}),$$

$$\varepsilon = \frac{\tau}{r\sqrt{r}},$$

$$\zeta = \mathbf{rv}^2 - 1 = \frac{(r \sqrt{r} \cdot \mathbf{v})^2}{r^2} - 1,$$

$$\eta_t = \frac{\mathbf{rv}}{\sqrt{r}} = \frac{(\mathbf{r}, r \sqrt{r} \mathbf{v})}{r^2},$$

ĉe kio y estas trovata el la ekvacio (1,14).

Al la esprimo (1,17) por g oni povas doni ankoraŭ unu interesan formon. Pro (1,14) ni povas skribi

$$\varepsilon - y^3 c_3 = \tau y^2 c_2 + y - (1 - \zeta) y^2 \cdot \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha^3} =$$

$$= \eta y^2 c_2 + y \left(1 - \frac{\alpha - \sin \alpha}{\alpha} \right),$$

sekve (1, 17) prenas la formon

$$(1, 19) \quad g = r/\bar{r} [\eta c_1(\alpha) + \eta y^2 c_2(\alpha)].$$

Per la esprimoj (1; 14, 16, 17, resp. 19) estas plene solvita la problemo pri eltrovado de pozicioj (efemeridoj) en ajna momento t , senpere el la donitaj pozicio kaj rapido en certa momento t_0 , sen bezono ke la tempo $t - t_0 = \tau$ eniru en la koeficientoj η , ζ . La funkcioj $c_1(\alpha)$, c_2 , c_3 , estas ĉiam realaj, senkonsidere ĉu α estas reala aŭ ne, resp. ĉu $\zeta > 1$ aŭ $\zeta < 1$. Tio ja signifas ke la ekvacio (1, 14) havas ĉiam almenaŭ unu (kaj fakte ĵus unu) realan solvon.

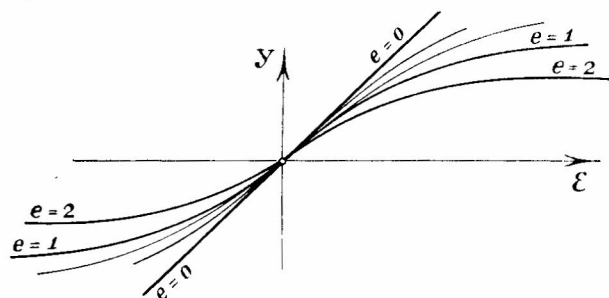
Kiam $t_0 = T$, t.e. kiam oni ekiras ĵus de la perihelia pozicio, ni havas $\eta = 0$, $\zeta = e$, kaj la ekvacio (1, 14) prenas la formon

$$(1, 20) \quad y + e y^3 c_3(y/\sqrt{1-e}) = \varepsilon = \frac{t-T}{r/\bar{r}}.$$

Se ni skribas ĝin en la formo

$$(1, 21) \quad y = \frac{\varepsilon}{1 + e y^2 c_3}$$

ni povas ankaŭ grafike prezenti la ligon inter y kaj ε .



Bdo 1

Por $e=0$ ni havas la rektan linion $y=\varepsilon$, kaj por ĉiu $e \neq 0$ du centre simetriajn branĉojn. Unu tia bone fartita diagramo povas bonege servi por grafika eltrovado de y , tre rapide kaj serie, ĉar oni bezonos nur tralegi la egaldistancajn ordinatojn de unu el la kurboj.

Esence nenio ŝanĝiĝas ankaŭ por neperihelia ekira pozicio, t.e. kiam ni pritraktas la ekvacion (1, 14) anstataŭ (1, 20). Por negrandaj ε ni vidas el la formo

$$(1, 22) \quad y = \frac{1}{1 + \zeta y^2 c_3 + \eta y c_2}$$

ke ĉiuj kurboj trapasas same la koordinatan centron kaj nemulte diversas de la supraj kurboj, ĉar

$\eta = \frac{rv}{\sqrt{r}}$ neniam povas esti granda (nome por para-

bola kaj hiperbola moviĝo la ekira pozicio ne povas esti malproksima de la perihelio, t.e. la tanĝanto estas preskaŭ orta kun la radiuso).

Kaj por pli grandaj ε oni povas skribi ĝin en la formo

$$y = \frac{\varepsilon - \eta y^2 c_2}{1 + \zeta y^2 c_3};$$

oni ja vidas ke ankaŭ tiam la kvantoj y nemulte (relative) diferencas de la kvantoj el la supra diagramo (sur kiu oni devas nur signi ζ anstataŭ e).

Ankaŭ per la unua derivado oni povas kontroli ke la kurboformo estas esence la sama. El

$$y + \eta \cdot \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \zeta} + \frac{\zeta}{1 - \zeta} \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sqrt{1 - \zeta}} = \varepsilon$$

oni trovas

$$\frac{dy}{d\varepsilon} \left[1 + \frac{\eta}{1 - \zeta} \sin \alpha \cdot \sqrt{1 - \zeta} + \frac{\zeta(1 - \cos \alpha)}{1 - \zeta} \right] = 1$$

$$(1, 23) \quad \frac{dy}{d\varepsilon} (1 + \eta y c_1 + \zeta y^2 c_2) = 1.$$

Ni tuj vidas ke oni ne havas ekstremajn punktojn, ĉar la derivado povas ŝanĝi la signon nur se

$$1 + \eta y c_1 + \zeta y^2 c_2 = 0$$

$$1 + \frac{\eta}{\sqrt{1 - \zeta}} \sin \alpha + \frac{\zeta}{1 - \zeta} (1 - \cos \alpha) = 0$$

$$1 - \zeta + \sqrt{1 - \zeta} \frac{e \sin u_0}{\sqrt{1 - \zeta}} \sin \alpha + \zeta - \zeta \cos \alpha = 0$$

$$1 - e \cos(\alpha + u_0) = 1 - \cos u = \frac{r_t}{a} = 0.$$

Ĉi tio estas evidente neebla kaj la derivado restas konstante pozitiva — la kurbo konstante supreniras, kiel en la supra (perihelia) kazo. La rezonado estas neaplikebla nur en parabola moviĝo, t.e. kiam $\zeta = 1$. Sed tiam

$$\frac{dy}{d\varepsilon} (1 + \eta y + \frac{y'}{2}) = 1$$

kaj la kvadrata trinomo evidente ne ŝanĝas la signon, ĉar $\eta^2 - 2 < 0$.

Fakte ni povas (1, 23) skribi en la formo

$$(1, 24) \quad \frac{dy}{d\varepsilon} \cdot \frac{r_t}{a(1 - \zeta)} = 1, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = \frac{r}{r_t},$$

kiu formo havas sencon por ĉiuspecaj moviĝoj. El ĝi oni vidas ke y kreskas kun ε kaj $\rightarrow \pm \infty$ kiam $\varepsilon \rightarrow \pm \infty$. Ĉee la tanĝanto en senlimo paralelas kun la abacisa akso en kazo de parabola aŭ hiperbola moviĝo, do tiam ε kreskas tre malrapide.

Oni povas utiligi (1, 24), resp. (1, 23), por rapida korekto de y pro negrandaj ŝanĝoj de ε , ĉar tiam oni havas

$$(1,25) \quad \Delta y = \frac{\Delta \varepsilon}{1 + \eta y c_1 + \zeta y^2 c_2},$$

speciale por perihelia ekira pozicio

$$(1,25') \quad \Delta y = \frac{\Delta \varepsilon}{1 + e y^2 c_2}.$$

Eĉ oni povas por nelongaj intervaloj kalkuli regule la efemeridon por iu meza momento kaj poste nur aldonadi la korektaĵojn ambaŭflanke (kvankam tiaj procedoj estas de negranda intereso plu—pro la tre evoluita kalkultekniko).

En la supraj esprimoj preskaŭ ĉiam aperas kune $y c_1$, $y^2 c_2$, $y^3 c_3$, kaj ni povas enkonduki la signaĵojn

$$(1,26) \quad m = y c_1(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1-\zeta}}, \quad p = y^2 c_2(\alpha) = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \zeta},$$

$$q = y^3 c_3(\alpha) = \frac{\alpha - \sin \alpha}{(\sqrt{1-\zeta})^3}.$$

Kun ili, la formuloj (1,14), (1,16), (1,17), (1,19) fariĝas

$$(1,27) \quad y + \eta p + \zeta q = \varepsilon,$$

$$(1,28) \quad f = 1 - p, \quad g = r/\bar{r}(\varepsilon - q) = \\ = (t - t_0) - q \cdot r/\bar{r} = r/\bar{r}(m + \eta p),$$

kaj (1,23) donas

$$(1,29) \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = \frac{1}{1 + \eta m + \zeta p}.$$

2) Kazo de parabolo kaj de hiperbolo

Por parabola moviĝo ĉio, kiel same ĉe Stumpff, simpliĝas, ĉar $\zeta = 1$, $\alpha = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{1}{6}$, kaj por kalkuli f , g , oni havas

$$(2,1) \quad y + \frac{\eta}{2} y^2 + \frac{1}{6} y^3 = \varepsilon,$$

$$(2,2) \quad f = 1 - \frac{1}{2} y^2,$$

$$g = r/\bar{r}(\varepsilon - \frac{1}{6} y^3) = (t - t_0) - \frac{r}{6\bar{r}} y^3.$$

La efemeridojn oni povas kalkuli ĉu solvinte unue la ekvacion (2,1) ĉu skribinte ĉion kiel la fermita formularo

$$(2,3) \quad y = \frac{g}{r/\bar{r}} - \eta(1-f), \quad 1-f = \frac{1}{2} y^2,$$

$$\frac{g}{r/\bar{r}} = \varepsilon - \frac{1}{6} y^3.$$

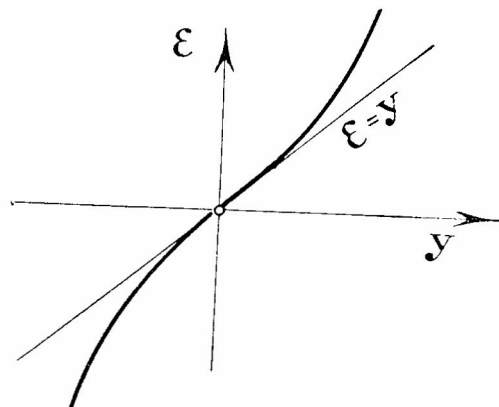
La fermita formularo donus, per sinsekvaj alproksimiĝoj, ne nur y , sed tuj ankaŭ f , g . Malfacilaĵo aperas ĉe elekto de konvena unua valoro por unu

de la nekonatoj. Sed ankaŭ por solvado de la ekvacio (2,1), pli bone en la formo

$$y = \frac{\varepsilon - \eta \cdot \frac{1}{2} y^2}{1 + \frac{1}{6} y^2},$$

ni bezonas unuan ekiran valoron por y . Ĉar y estas malgranda, oni povas fari diagramon de la funkcio

$$(2,4) \quad \varepsilon = y \left(1 + \frac{1}{6} y^2\right)$$



Bdo 2

kaj el ĝi simple traŝlegadi la unuan proksimuman valoron (aparte por ĉiu ε). Oni eĉ povas apud ĉi tiu kurbo, koresponda al $\eta = 0$, desegni ankoraŭ kelkajn proksimajn kurbojn (ekz. por $\eta = \pm 0,1$, $\eta = \pm 0,2$ ktp.). El ili ni traŝlegadus iom pli precizajn valorojn por y . Aŭ ni povas plene utiligadi la diagramon (2,4), sed en ĝi traŝlegi la valoron y por $\varepsilon + 3\eta$ (anstataŭ por ε) kaj tiam depreni 3η , ĉar (2,1) povas havi ankaŭ la formon

$$(2,5) \quad y + 3\eta = \frac{\varepsilon + 3\eta}{1 + \frac{1}{6} y^2}.$$

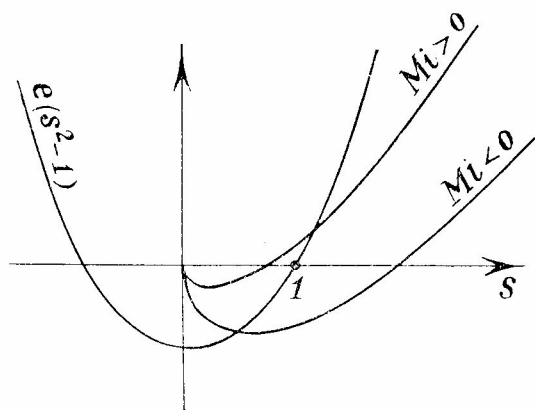
Por hiperbola moviĝo la supra metodo estas nepraktika kiam oni havas kalkuli efemeridojn de malproksimaj pozicioj, ĉar la funkcioj c_1 , c_2 , c_3 , kondukas iom alimaniere por nereaj argumentoj, nome por grandaj $t - t_0$ ili prenas senlimajn valorojn (kvankam ili restas realaj kaj pozitivaj ankaŭ ĉe hiperbolo). Pri ĉi tio oni facile konvinkiĝas kiam unue oni konstatas el la Keplera ekvacio ke u estas pure nereala kvanto en hiperbola kazo, do ankaŭ $\alpha = u - u_0$. Post tio oni vidas ke $u \rightarrow \infty$ (laŭlonge de nereala akso) kiam $t \rightarrow \infty$.

La lastan aserton oni pravas per enkonduko de eks ($-ui$) = s , pro kio la Keplera ekvacio fariĝas

$$\ln s + e \cdot \frac{1-s^2}{2s} = -Mi, \quad M = \frac{t-t_0}{a/\bar{a}},$$

$$2s(\ln s + Mi) = e(s^2 - 1).$$

Grafikigo de la maldekstra kaj de la dekstra funkcio montras ke por $Mi < 0$ la kurboj tranĉas unu la alian en iu $s < 1$, sed por $Mi > 0$ ili tranĉiĝas en



Bdo 3

iu $s > 1$. Kiam Mi kreskas la parabolo ne ŝanĝiĝas kaj la alia kurbo tranĉas ĝin aŭ ĉiam pli proksime al la koordinata centro (t. e. $s \rightarrow \infty$), aŭ ĉiam pli proksime al la senlimo ($s \rightarrow 0$). En ambaŭ okazoj, pro la farita substituo $-ui = lns$, oni vidas ke ui fariĝas senlima.

La samo okazas kun kiu ajn funkcio c_1, c_2, c_3 ekz.

$$c_3 = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\text{eks}(\alpha i) - \text{eks}(-\alpha i)}{2\alpha^3 i}.$$

Unu el la esprimoj $\text{eks}(\alpha i)$, $\text{eks}(-\alpha i)$, kreskas pli rapide ol $\alpha^3 i$ kaj $\rightarrow +\infty$ kiam $\alpha i \rightarrow \infty$, do la funkcio prenas tre grandan valoron por granda i .

Pro ĉio tio la solvado de la ekvacio (1,14) por grandaj i , en la hiperbola kazo, ne povas esti per sinsekvaj alproksimiĝoj, kaj pro la sama kaŭzo tio ne povas esti ankaŭ kun la ekvacio (1,4). Ne utilas tiucele same la fermita formularo

$$(2,6) \begin{cases} 1-f=p, & \frac{g}{r\sqrt{r}} = m + \eta p - \varepsilon - q, \\ y = \varepsilon(1-\zeta) + \zeta \cdot \frac{g}{r\sqrt{r}} - \eta p = \varepsilon - \eta p - \zeta q. \end{cases}$$

La formularo estas tre praktika nur ŝajne, sed por neniu el la kvantoj f, g, y , oni povas trovi konvenan ekiran valoron, tian ke la procedo konverĝu. Tial ni bezonas alian procedon por eltrovado de f, g .

Ni trovos ĝin per tia integrado en kiu tute ne aperos nereaj kvantoj. Integrado de la ekvacio

$$(2,7) \quad c^2 - \mathbf{r}^2 \mathbf{v}^2 - (\mathbf{r}\mathbf{v})^2 = r^2 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) - r^2 \left(\frac{dr}{dt} \right)^2,$$

aŭ en la klasika formo

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c, \quad r = \frac{c^2}{1 + e \cos \theta},$$

iras laŭ du tute diversaj vojoj (se ni deziras resti

en la realo), laŭ tio ĉu $\frac{1+e}{1-e}$ estas pozitiva aŭ negativa.

Ne enirante la konatajn detalojn de la integrado, donu al la trovita integralo por hiperbola kazo (kie $e > 1$) formon konvenan por kalkulado de f, g . En la ekvacio (2,7) enkonduku w per la substituo

$$(2,8) \quad r = \frac{-a(e - \cos w)}{\cos w}$$

kaj ĝi fariĝas

$$\frac{(e - \cos w)dw}{\cos^2 w} = \frac{dt}{-a\sqrt{-a}};$$

ĝia integralo donas

$$(2,9) \quad c(\lg w - \lg w_0) = \frac{t - t_0}{-a\sqrt{-a}} \ln \frac{(1 - \sin w) \cos w_0}{(1 - \sin w_0) \cos w}.$$

Inter ĉi tiu, hiperbola, anomalio w kaj la vera anomalio θ ekzistas ligaĵo

$$(2,10) \quad \lg \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \lg \frac{w}{2}$$

aŭ

$$(2,11) \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin w}{e - \cos w}, \quad \cos \theta = \frac{e \cos w - 1}{e - \cos w}$$

Kaj la komencan valoron w_0 ni havos el

$$\cos \theta_0 = \frac{c^2 - r}{re}, \quad \sin \theta_0 = \frac{c(\mathbf{r}\mathbf{v})}{ac},$$

kio donas

$$(2,12) \quad e \lg w_0 = \frac{(\mathbf{r}\mathbf{v})}{\sqrt{-a}}, \quad \cos w_0 = \frac{-ae}{r_0 - a},$$

ĉe kio

$$(2,13) \quad e^2 - 1 = \frac{c^2}{-a}, \quad \frac{1}{-a} = v^2 - \frac{2}{r}.$$

Evidente ĉio restas reala, ĉar la esprimo sub logaritmo estas pozitiva

$$(r > 0, \text{ do } \cos w > 0, -\frac{\pi}{2} < w < \frac{\pi}{2}).$$

Por trovi f kaj g ekiru de la identaĵo

$$c^2 \mathbf{r}_t = [\mathbf{c}[\mathbf{r}, \mathbf{c}]] = [[\mathbf{r}\mathbf{v}][\mathbf{r}, \mathbf{c}]] = (\mathbf{r}\mathbf{r}_t \mathbf{c})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\mathbf{r}_t \mathbf{c})\mathbf{r},$$

kio donas

$$(2,14) \quad (\mathbf{r}_t \mathbf{v}\mathbf{c}) = c^2 f, \quad c^2 g = (\mathbf{r}\mathbf{r}_t [\mathbf{c}\mathbf{r}]) = r_t c r \sin(\theta - \theta_0),$$

do

$$(2,15) \quad g = \frac{cr \sin(\theta - \theta_0)}{1 + e \cos \theta}.$$

Plue el la Laplace-Hamilton-a integralo

$$[\mathbf{v}, \mathbf{c}] - \frac{\mathbf{r}_t}{r_t} = c = [\mathbf{v}\mathbf{c}] - \frac{\mathbf{r}}{r},$$

utiligante (2,4) kaj multiplikante skalare per $\mathbf{r}_r$ ni ricevas

$$c^2 - r_r = c^2 f - \frac{(\mathbf{r}_r, \mathbf{r})}{r}$$

$$c^2(1-f) = \frac{1}{r} (\mathbf{r} \mathbf{r}_r - \mathbf{r} \mathbf{r}_r) = r_r (1 - \cos(\theta - \theta_0))$$

$$(2,16) \quad 1-f = \frac{1 - \cos(\theta - \theta_0)}{1 + e \cos \theta}$$

Ni devas ankoraŭ en la esprimoj (2,15) kaj (2,16) anstataŭi θ per w utiligante (2,11). La ŝanĝo donas

$$1-f = \frac{c^2 - 1 - \cos w \cos w_0 (e^2 - 1) - (e^2 - 1) \sin w \sin w_0}{(e^2 - 1) \cos w (e - \cos w_0)}$$

$$= \frac{1 - \cos(w - w_0)}{\cos w \cdot r \cos w_0} (-a).$$

Al ĉi tiu esprimo oni povas doni la konvenajn formojn

$$(2,17) \quad 1-f = \frac{\zeta \sec w}{e(\zeta - 1)} (1 - \cos(w - w_0)),$$

$$\zeta = \frac{e}{\cos w_0} = r v^2 - 1 = 1 - \frac{r}{a},$$

$$(2,18) \quad 1-f = \frac{\zeta \sec w}{e(\zeta - 1)} + \frac{a}{r} (1 + \operatorname{tg} w \operatorname{tg} w_0).$$

Samvoje (2,15) fariĝas

$$g = \frac{r \sqrt{e^2 - 1} (e \sin w \cos w_0 - \sin w - e \cos w \sin w_0 + \sin w_0)}{(e^2 - 1) \cos w (e - \cos w_0)}$$

$$= \frac{r \sqrt{-a} [e \sin(w - w_0) - (\sin w - \sin w_0)]}{r \cos w \cos w_0} (-a).$$

Sed

$$\sin w - \sin w_0 = \sin(w - w_0) \cos w_0 - [1 - \cos(w - w_0)] \sin w_0$$

kaj pro (2,17) ni havos pluen

$$\frac{g}{-a \sqrt{-a}} = \frac{e \sin(w - w_0)}{\cos w \cos w_0} - \frac{\sin(w - w_0)}{\cos w} + \operatorname{tg} w_0 \cdot \frac{e(\zeta - 1)}{\zeta} (1-f).$$

Konsiderante (2,8) kaj $\zeta = \frac{e}{\cos w_0}$, ĉi tio fariĝas

$$(2,19) \quad \frac{g}{r \sqrt{-a}} = \frac{\sin(w - w_0)}{\cos w} + \sin w_0 (1-f) = \cos w_0 \operatorname{tg} w - f \sin w_0.$$

Estas tute nature preni por la variablo

$$(2,20) \quad z = \operatorname{tg} w,$$

kiu prenas la valorojn de $-\infty$ ĝis $+\infty$ dum w ŝanĝiĝas de $-\frac{1}{2}\pi$ ĝis $+\frac{1}{2}\pi$. Tiam por eltrovo de z, f, g , ni havos — de (2,9), (2,18), (2,19) — egalajojn

$$(2,21) \quad z = h_0 + \frac{1}{e} \frac{t - t_0}{a \sqrt{-a}} + \frac{1}{e} \ln(\sqrt{1 + z^2} - z),$$

$$h_0 = z_0 - \frac{1}{e} \ln(\sqrt{1 + z_0^2} - z_0),$$

$$(2,22) \quad 1-f = \frac{\zeta \sqrt{1 + \zeta^2}}{(\zeta - 1)e} + \frac{a}{r} (1 + z z_0),$$

$$g = \frac{r \sqrt{-a}}{\zeta} e (z - f z_0), \quad z_0 = \frac{(\mathbf{r} \mathbf{v})}{e \sqrt{-a}}.$$

El (2,21) oni povas trovi z per sinsekvaj alproksimiĝoj. Ili konverĝos ĉar la derivivo de la dekstra flanko

$$\frac{1}{e} \frac{1}{\sqrt{1 + z^2} - z} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + z^2}} - 1 \right) = - \frac{1}{e \sqrt{1 + z^2}}$$

estas tre malgranda por grandaj z (resp. por grandaj t). Post tio (2,22) tuj donas f kaj g .

La donita procedo konvenas por aŭtomata maŝina kalkulado. Se oni kalkulas ankaŭ kun trigonometriaj tabeloj, pli konvenas aliformigi la esprimojn je $(w - w_0)$. Tiam estas pli bone preni (2,17) kaj (2,19)

$$1-f = \frac{1}{e - \cos w_0} \cdot \frac{1 - \cos(w - w_0)}{\cos w}$$

$$\frac{g}{r \sqrt{-a}} = \frac{\sin(w - w_0)}{\cos w} + \sin w_0 (1-f)$$

Por eltrovo de w ni utiligus (2,9) en la formo

$$e \operatorname{tg} w = e \operatorname{tg} w_0 - \ln(\sec w_0 - e \operatorname{tg} w_0) + \frac{t - t_0}{-a \sqrt{-a}} + \ln(\sec w - e \operatorname{tg} w)$$

$$e \operatorname{tg} w_0 = \frac{(\mathbf{r} \mathbf{v})}{\sqrt{-a}},$$

$$e \sec w_0 = \zeta = r v^2 - 1, \quad \frac{1}{-a} = \frac{\zeta - 1}{r}.$$

3) La procedo por elipsa moviĝo

Por elipsa kazo estas aplikeblaj la ĝenerala „fundamenta ekvacio“ kaj ĝia modifo (1,14), sed tio estas tute senbezona kiam oni pli simple solvas la taskon per la Keplera ekvacio. La sola bezono ĉi tie (por senpera utiligo de $\mathbf{r}, \mathbf{v}$) konsistas en ioma modifo de la Keplera ekvacio kaj de la esprimoj por f, g , tiel ke en ili oni kalkulu kun $u - u_0$. Evidente

$$(3,1) \quad u - u_0 = \frac{t - t_0}{a \sqrt{a}} + e \sin(u - u_0) \cos u_0 - e \sin u_0 [1 - \cos(u - u_0)]$$

Sed konsiderante (1,16) kaj (1,19), nun en la formo

$$(3,2) \quad 1-f = \frac{1 - \cos(u - u_0)}{1 - \zeta}$$

$$(3,3) \quad \frac{g}{r \sqrt{r}} = \frac{\sin(u - u_0)}{\sqrt{1 - \zeta}} + \eta (1-f),$$

kie — pro (1,11) kaj (1,13) —

$$\zeta = e \cdot \cos u_0 = rv^2 - 1 = 1 - \frac{r}{a},$$

$$\eta = \frac{e \sin u_0}{\sqrt{1 - \zeta}} = \frac{(rv)}{\sqrt{r}},$$

al la dekstraflanka esprimo (3,1) ni povas doni la formon

$$\begin{aligned} \frac{t - t_0}{a\sqrt{a}} + \zeta \left[\frac{g}{r\sqrt{a}} - \eta \sqrt{1 - \zeta} (1 - f) \right] - \\ - \eta \sqrt{1 - \zeta} (1 - \zeta) (1 - f) = \frac{t - t_0}{a\sqrt{a}} + \zeta \frac{g}{r\sqrt{a}} - \\ - \eta \sqrt{1 - \zeta} (1 - f). \end{aligned}$$

Signu ankoraŭ, pro malplilonga skribo,

$$(3,4) \quad \eta_1 = \eta \sqrt{1 - \zeta}, \quad g_1 = \frac{g}{r\sqrt{a}}, \quad f_1 = (1 - f) (1 - \zeta)$$

kaj ni havas la fermitan formularon

$$(3,5) \quad \begin{cases} f_1 = 1 - \cos(u - u_0), \quad g_1 = \sin(u - u_0) + \eta_1 f_1, \\ u - u_0 = \frac{t - t_0}{a\sqrt{a}} + \zeta g_1 - \eta_1 f_1. \end{cases}$$

En la elipsa kazo estas ζ kaj η_1 etaj kvantoj, dro kio en la unua alproksimiĝo oni prenas

$$u - u_0 = \frac{t - t_0}{a\sqrt{a}}, \quad a = \frac{r}{1 - \zeta},$$

oni tiam trovas f_1, g_1 , denove $u - u_0$ ktp. La procedo estas kaj praktika kaj konverĝa (des pli ju pli malgrandaj estas η_1, ζ), kaj ĉion oni povas efektivigi rigardante (r, v) kiel elemento-sistemon de la koncerna elipso. Tio ja estas pli simpla ol, pro ĝeneraleco, aplikadi la „ĝeneralan ekvacion“. Se al iu pli konvenas, oni povas unue trovi $(u - u_0)$ el (3,1) t.e. el

$$(3,6) \quad \begin{aligned} u - u_0 = \frac{t - t_0}{a\sqrt{a}} + \zeta \sin(u - u_0) - \\ - \eta_1 [1 - \cos(u - u_0)], \end{aligned}$$

kio precipe konvenas por proksimaj pozicioj, ĉar tiam $\sin(u - u_0)$, $1 - \cos(u - u_0)$ estas same etaj kvantoj kaj la procedo rapide konverĝas.

Per ĉi tio estas plene ebligita eltrovado de efemeridoj por ajna (proksima aŭ malproksima) momento, surbaze de trovitaj nur (r, v) , ĉar ĉi tie la esprimoj por f, g dependas de nenioj aliaj elementoj.

En la verkaĵo [5] estas donita ebleco por kalkulado de f, g per ilia seriigo laŭ la gradoj de η, ζ .

La koeficientoj apud η, ζ estis tie donitaj kiel serioj

kun gradoj de $\varepsilon = \frac{t - t_0}{r\sqrt{r}}$ (estas donitaj nur kelkaj

unuaj membroj en la serioj, kun ebleco kalkuli ankaŭ aliajn). Sed la koeficientojn oni povas havi ankaŭ kiel eksplicaj funkcioj de ε , danke al la ĉi tie trovitaj esprimoj por f, g .

Tiucele la formularon (3,5), utiligante gro malpli longa skribo ankaŭ la jam uzitan sinon $\alpha = u - u_0$, ni skribu en la formo

$$\alpha = M + \zeta \sin \alpha - \eta (1 - \cos \alpha), \quad M = \frac{t - t_0}{a\sqrt{a}},$$

$$(1 - \zeta) f = \cos \alpha - \zeta, \quad g_1 = \sin \alpha + \eta (1 - \cos \alpha),$$

kie estas denove prenita η anstataŭ η_1 . Popaŝa derivigo donas unue

$$h \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} = -1 + \cos \alpha, \quad h \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} = \sin \alpha,$$

$$h = 1 + \eta \sin \alpha - \zeta \cos \alpha,$$

$$h \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} = - \left(\frac{\partial h}{\partial \eta} + \sin \alpha \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \quad \frac{\partial h}{\partial \eta} = \sin \alpha + h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}$$

$$h \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta \partial \zeta} = - \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} - \frac{\partial h}{\partial \zeta} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \quad \frac{\partial h}{\partial \zeta} = - \cos \alpha + h_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta}$$

$$h \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \zeta^2} = - \left(\frac{\partial h}{\partial \zeta} - \cos \alpha \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \quad h_1 = \eta \cos \alpha + \zeta \sin \alpha$$

$$h \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \eta^3} = \dots \quad h \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \eta^2 \partial \zeta} = \dots \quad h \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \eta \partial \zeta^2} = \dots \quad h \frac{\partial^3 \alpha}{\partial \zeta^3} = \dots$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} = \dots, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \eta \partial \zeta} = \dots \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \zeta^2} = \dots,$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial \zeta} = \dots \quad \frac{\partial h_1}{\partial \eta} = \dots$$

ktp, ktp.

Poste la samo donas ĉe f kaj g_1 :

$$(1 - \zeta) \frac{\partial f}{\partial \eta} = - \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}, \quad (1 - \zeta) \frac{\partial f}{\partial \zeta} = f - 1 - \sin \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta},$$

$$(1 - \zeta) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} = - \sin \alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} - \cos \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \right)^2$$

$$(1 - \zeta) \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} = \frac{\partial f}{\partial \eta} - \sin \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} - \cos \alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta},$$

$$(1 - \zeta) \frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2} = 2 \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} - \sin \alpha \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \zeta^2} - \cos \alpha \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \zeta} \right)^2,$$

$$(1 - \zeta) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} = \dots \quad (1 - \zeta) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^2 \partial \zeta} = \dots$$

$$(1 - \zeta) \frac{\partial^3 f}{\partial \eta \partial \zeta^2} = \dots \quad (1 - \zeta) \frac{\partial^3 f}{\partial \zeta^3} = \dots$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_1}{\partial \eta} &= 1 - \cos \alpha + k \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}, & \frac{\partial g_1}{\partial \zeta} &= k \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta}, \\ k &= \cos \alpha + \eta \sin \alpha, \\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial \eta^2} &= k \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta^2} + \left(\sin \alpha + \frac{\partial k}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 g_1}{\partial \eta \partial \zeta} &= k \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \eta \partial \zeta} + \frac{\partial k}{\partial \eta} \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta}, & \frac{\partial^2 g_1}{\partial \zeta^2} &= k \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial k}{\partial \zeta} \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta}, \\ \frac{\partial k}{\partial \eta} &= k_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \sin \alpha, & \frac{\partial k}{\partial \zeta} &= k_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \zeta}, \\ k_1 &= \eta \cos \alpha - \sin \alpha, \\ \frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^3} &= \dots, & \frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta^2 \partial \zeta} &= \dots \\ \frac{\partial^3 g_1}{\partial \eta \partial \zeta^2} &= \dots, & \frac{\partial^3 g_1}{\partial \zeta^3} &= \dots \\ \frac{\partial^2 k}{\partial \eta^2} &= \dots, & \frac{\partial^2 k}{\partial \eta \partial \zeta} &= \dots, & \frac{\partial^2 k}{\partial \zeta^2} &= \dots \\ \frac{\partial k_1}{\partial \eta} &= \dots, & \frac{\partial k_1}{\partial \zeta} &= \dots, & \text{ktp., ktp.}\end{aligned}$$

Post enigo de $\eta=0$, $\zeta=0$ eu ĉi tiuj esprimoj kaj post uzo de la signoj

$$\alpha_\eta = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \right)_0, \quad p_{\eta\eta} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right)_0, \quad q_{\eta\zeta\zeta} = \left(\frac{\partial^3 q}{\partial \eta \partial \zeta^2} \right)_0, \quad \text{ktp.},$$

oni trovas sinsekve la „nulajn“ valorojn:

$$x_0 = M = \frac{t-t_0}{a\sqrt{a}}, \quad h_0 = 1, \quad \alpha_\eta = -1 + \cos M,$$

$$\alpha_\zeta = \sin M, \quad h_{1,0} = 0, \quad h_\eta = \sin M, \quad h_\zeta = -\cos M,$$

$$x_{\eta\eta} = 2 \sin M (1 - \cos M),$$

$$x_{\eta\zeta} = \cos 2M - \cos M = -(1 - \cos M) (1 + 2 \cos M),$$

$$x_{\zeta\zeta} = \sin 2M, \quad h_{\eta\eta} = -2 \cos (1 - \cos M),$$

$$h_{\eta\zeta} = \sin M (2 \cos M - 1), \quad h_{\zeta\zeta} = 2 \sin^2 M,$$

$$x_{\eta\eta\eta} = -3 (1 - \cos M)^2 (2 + 3 \cos M),$$

$$x_{\eta\eta\zeta} = \sin M (1 - \cos M) (1 + 9 \cos M),$$

$$x_{\eta\zeta\zeta} = (1 - \cos M) (2 - 5 \cos M - 9 \cos^2 M),$$

$$x_{\zeta\zeta\zeta} = 3 \sin M (2 \cos^2 M - \sin^2 M), \quad \text{ktp.}$$

Surbaze de la „nulaj“ valoroj, la supraj derivoj de f, g_1 donos al ni la seriojn (denove skribita η_1 anstataŭ η):

$$\begin{aligned}(3, 7) \quad 1-f &= (1 - \cos M) [1 - \eta_1 \sin M + \zeta (2 \cos M) + \\ &+ \frac{1}{2} \eta_1^2 (1 - \cos M) (2 + 3 \cos M) - \\ &- \eta_1 \zeta \sin M (2 + 3 \cos M) + \\ &+ \frac{1}{2} \zeta^2 (4 + 5 \cos M + 3 \cos^2 M) + \\ &+ \frac{1}{6} \eta_1^3 \sin M (1 - \cos M) (5 + 16 \cos M) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+ \frac{1}{2} \eta_1^2 \zeta (1 - \cos M) (2 + 17 \cos M + 16 \cos^2 M) - \\ &- \frac{1}{2} \eta_1 \zeta^2 \sin M (1 + 13 \cos M + 16 \cos^2 M) + \\ &+ \frac{1}{6} \zeta^3 (8 + 11 \cos M + 25 \cos^2 M + 16 \cos^3 M)] + \\ &+ \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3, 8) \quad \frac{g}{a\sqrt{a}} &= \sin M + \eta_1 (1 - \cos M)^2 + \zeta \sin M \cos M - \\ &- \frac{3}{2} \eta_1^2 \sin M (1 - \cos M)^2 - \\ &- \eta_1 \zeta (1 - \cos M) (\cos 2M - \sin^2 M) + \\ &+ \frac{1}{2} \zeta^2 \sin M (2 \cos^2 M - \sin^2 M) + \\ &+ \frac{1}{3} \eta_1^3 (1 - \cos M)^2 (6 + 2 \cos M - \\ &- 8 \cos^2 M) - \frac{1}{2} \eta_1^2 \zeta \sin M (1 - \cos M) \cdot \\ &\cdot (4 + 5 \cos M - 14 \cos^2 M) + \\ &+ \frac{1}{2} \eta_1 \zeta^2 (1 - \cos M) (2 + 12 \cos M - \\ &- 4 \cos^2 M - 16 \cos^3 M) + \\ &+ \frac{1}{3} \zeta^3 \sin M \cos M (8 \cos^2 M - 5) + \dots\end{aligned}$$

4) Preskaŭparabola moviĝo

En kazo de preskaŭparabola moviĝo estas bezonata la ĝenerale modifita Keplera ekvacio, ĉar tiam en la Keplera ekvacio oni povas havi kaj realajn kaj nereajajn solvojn, en la modifita — nur realajn solvojn. Krome en la pure parabola kazo la modifita ekvacio reduktiĝas al la ekvacio de Barker, t. e. al tio kio nature venas en la integrad—procedo.

Tiam por eltrovo de f, g ni povas utiligi la ekvaciaron (1,27), (1,28), respektive

$$(4, 1) \quad y = \varepsilon - \eta p - \zeta q, \quad \varepsilon = \frac{t-t_0}{r\sqrt{r}},$$

$$p = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \zeta}, \quad q = \frac{y}{1 - \zeta} \left(1 - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right),$$

$$(4, 2) \quad f = 1 - p, \quad g = (\varepsilon - q) r \sqrt{r} = t - t_v - qr\sqrt{r}, \\ \alpha = y\sqrt{1 - \zeta}.$$

Ju pli proksima al 1 estas ζ , t. e. la moviĝo pli proksima al la parabola, des malpli da peno ni havos por grandaj t , ĉar tiam α estas malgranda, malgraŭ la grandaj y . Tial eblas sukcese utiligi la ekvaciaron (4,1) por ĉiuj tempintervaloj dum komet—moviĝo laŭlonge de elipsa aŭ hiperbola orbito ne-

multe devianta de la parabola, kaj havi ĉiam realajn solvojn. Se la moviĝo ne estas parabolproksima, sed pure elipsa aŭ pure hiperbola, tiam oni ankaŭ ne bezonas la ĝeneralan ekvacion, ĉar estas pli simple labori kun la koncerna specialigita ekvacio.

Ankaŭ por la parabolproksima moviĝo, kiel ni havis por la elipsa kazo, ni povas seriigi la esprimojn por f , g . La serioj estos des pli konverĝaj ju malpli la moviĝo devias de parabolo (resp. de cirklo ĉe elipsa moviĝo). Por la seriigo oni devas fari konvenan elekton de la kvantoj je kies gradoj oni seriigos, tian elekton ke la seriigo kaj la trovataj serioj ne estu tro komplikaj.

Konsidere ke ĉi tie ζ proksimas al 1, $1-\zeta$ estas malgranda kaj ni prenu ĝin por unu el etaj kvantoj, malgraŭ tio ke en la formuloj aperas senevite $\sqrt{1-\zeta}$ (fakte la radikoj aperas nur formale en la funkcioj c_2, c_3). Por la dua eta kvanto estas nature preni la kvanton η , kiu estas malgranda malproksime de la perihelio (kaj ĉe la preskaŭparabola moviĝo aliloke oni ja ne povas observi la kometon).

Do ni signu

$$(4,4) \quad \zeta = 1 - \sigma, \quad \alpha = y\sqrt{\sigma},$$

kaj ni trovu unue derivojn de la esprimoj (1,26), respektive

$$(4,5) \quad m = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\sigma}}, \quad p = \frac{1 - \cos \alpha}{\sigma}, \quad q = \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sigma\sqrt{\sigma}}.$$

Tuj ni trovas

$$(4,6) \quad \begin{cases} \frac{\partial m}{\partial \eta} = \cos \alpha \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial p}{\partial \eta} = m \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial q}{\partial \eta} = p \frac{\partial y}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial m}{\partial \sigma} = \cos \alpha \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{y}{2\sigma} \right) - \frac{m}{2\sigma} = \cos \alpha \frac{\partial y}{\partial \sigma} - m_1, \\ \frac{\partial p}{\partial \sigma} = m \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{y}{2\sigma} \right) - \frac{1 - \cos \alpha}{\sigma^2} = m \frac{\partial y}{\partial \sigma} - p_1, \\ \frac{\partial q}{\partial \sigma} = p \frac{\partial y}{\partial \sigma} - q_1, \end{cases}$$

$$(4,7) \quad \text{kie} \quad m_1 = \frac{m - y \cos \alpha}{2\sigma}, \quad p_1 = \frac{2p - my}{2\sigma}, \quad q_1 = \frac{3q - py}{2\sigma}.$$

En derivoj de p , q ni havas ĵus la bezonajn derivojn de $1-f$ kaj de $\varepsilon = \frac{g}{r\sqrt{r}}$; por trovi ilin mankas la derivoj de y , kiujn ni trovos el (4, 1), nome

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} (1 + \eta m + \zeta p) + p = 0,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \sigma} (1 + \eta m + \zeta p) + \eta p_1 + \zeta q_1 + q = 0,$$

$$(4,8) \quad \text{aŭ} \quad w \frac{\partial y}{\partial \eta} = -p, \quad w \frac{\partial y}{\partial \sigma} = w_1,$$

kun

$$(4,9) \quad w = 1 + \eta m + \zeta p, \quad w_1 = q + \eta p_1 + \zeta q_1.$$

Pro plujaj derivoj eliminu $\frac{\partial y}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ el (4,6)

kaj (4,8) kaj tio donos

$$(4,10) \quad \begin{cases} w \frac{\partial m}{\partial \eta} = -p \cos \alpha, & w \frac{\partial m}{\partial \sigma} = \cos \alpha \cdot w_1 - m_1 w \\ w \frac{\partial p}{\partial \eta} = -mp, & w \frac{\partial p}{\partial \sigma} = mw_1 - p_1 w \\ w \frac{\partial q}{\partial \eta} = -p^2, & w \frac{\partial q}{\partial \sigma} = pw_1 - q_1 w. \end{cases}$$

Daŭrigante la derivadon oni trovas

$$(4,11) \quad w \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} = [2m^2 p w + p^2 \cos \alpha (1 + \zeta p) - \zeta m^2 p^2] w^{-2},$$

$$w \frac{\partial^2 p}{\partial \eta \partial \sigma} = \left[mp^2 + p \frac{\partial m}{\partial \sigma} (1 + \zeta p) + m \frac{\partial p}{\partial \sigma} (1 + \eta m) \right] w^{-1},$$

$$w \frac{\partial^2 p}{\partial \sigma^2} = - \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma} + p_1 \right) \left(\eta \frac{\partial m}{\partial \sigma} + \zeta \frac{\partial p}{\partial \sigma} - p \right) +$$

$$+ \frac{\partial m}{\partial \sigma} w_1 - \left(1 + \zeta p \right) \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} + m \left(\zeta \frac{\partial q_1}{\partial \sigma} - q_1 + \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right);$$

$$w \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} = (3mw - \eta p \cos \alpha - \zeta mp) p^2 w^{-2},$$

$$w \frac{\partial^2 q}{\partial \eta \partial \sigma} = -p \left[p^2 - \eta p \frac{\partial m}{\partial \sigma} + \frac{\partial p}{\partial \sigma} (2w - \zeta p) \right] w^{-1},$$

$$w \frac{\partial^2 q}{\partial \sigma^2} = - \frac{\partial q}{\partial \sigma} \left(\eta \frac{\partial m}{\partial \sigma} + \zeta \frac{\partial p}{\partial \sigma} - 2p \right) + \frac{\partial p}{\partial \sigma} \left(\eta p_1 + q \right) - \frac{\partial q_1}{\partial \sigma} (1 + \eta m) + p \eta \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} - q_1 \eta \frac{\partial m}{\partial \sigma}.$$

Oni bezonas ĉi tie, sekve de (4,7) kaj (4,10), utiligi

$$(4,12) \quad \begin{cases} w \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sigma} (2mw_1 - 2p_1 w - mw_1 - y \cos \alpha w_1 + \\ + ym_1 w - 2p_1 w) = m_1 w_1 - wp_2, \\ w \frac{\partial q_1}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\sigma} (3pw_1 - 3q_1 w - mw_1 y + yp_1 w - \\ - pw_1 - 2q_1 w) = p_1 w_1 - wq_2, \end{cases}$$

kun la signaĵoj

$$(4,13) \quad p_2 = \frac{4p_1 - ym_1}{2\sigma} = \frac{y^2 \sin \alpha - 5my + 8p}{4\sigma^2},$$

$$q_2 = \frac{5q_1 - yp_1}{2\sigma} = \frac{y^2 m - 7py + 15q}{4\sigma}.$$

La triaj derivoj estos

$$(4,14): w \frac{\partial^3 p}{\partial \eta^3} = -2 \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \left(m + \eta \frac{\partial m}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) - \\ - \frac{\partial p}{\partial \eta} \left(2 \frac{\partial m}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2} + \zeta \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right) - m \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} - \\ - 2 \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial m}{\partial \eta} - p \frac{\partial^2 m}{\partial \eta^2},$$

$$w^3 \frac{\partial^3 p}{\partial \eta^2 \partial \sigma} = \dots \quad w^2 \frac{\partial^3 p}{\partial \eta \partial \sigma^2} = \dots \quad w \frac{\partial^3 p}{\partial \sigma^3} = \dots$$

$$(4,15): w \frac{\partial^3 q}{\partial \eta^3} = \dots \quad w^3 \frac{\partial^3 q}{\partial \eta^3 \partial \sigma} = \dots$$

$$w \frac{\partial^3 q}{\partial \eta \partial \sigma^2} = \dots, \quad w \frac{\partial^3 q}{\partial \sigma^3} = \dots$$

Por kalkuli ilin ni bezonos

$$(4,16) \left\{ \begin{aligned} w \frac{\partial^2 m}{\partial \sigma^2} &= - \left(m_1 + \frac{\partial m}{\partial \sigma} \right) \left(\eta \frac{\partial m}{\partial \sigma} + \zeta \frac{\partial p}{\partial \sigma} - p \right) - \\ &- m w_1 \left(\sigma \frac{\partial y}{\partial \sigma} + \frac{y}{2} \right) + \cos \alpha \left(\eta \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} + \zeta \frac{\partial q_1}{\partial \sigma} - \right. \\ &- \left. q_1 + \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) - w \frac{\partial m_1}{\partial \sigma}, \\ w \frac{\partial m_1}{\partial \sigma} &= \frac{1}{2} m y w_1 - m_2 w, \end{aligned} \right.$$

$$(4,17) m_2 = \frac{3 m_1 - \frac{1}{2} y^2 m}{2 \sigma} = \frac{3 m - y^2 m \sigma - 3 y \cos \alpha}{4 \sigma^2};$$

$$(4,18) \left\{ \begin{aligned} w \frac{\partial^2 p_1}{\partial \sigma^2} &= - \left(p_2 + \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} \right) \left(\eta \frac{\partial m}{\partial \sigma} + \zeta \frac{\partial p}{\partial \sigma} - p \right) + \\ &+ w_1 \frac{\partial m_1}{\partial \sigma} + m_1 \left(\eta \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} + \zeta \frac{\partial q_1}{\partial \sigma} - q_1 + \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) - \\ &- w \frac{\partial p_2}{\partial \sigma}, \\ w \frac{\partial^2 q_1}{\partial \sigma^2} &= - \left(q_2 + \frac{\partial q_1}{\partial \sigma} \right) \left(\eta \frac{\partial m}{\partial \sigma} + \zeta \frac{\partial p}{\partial \sigma} - p \right) + \\ &+ w_1 \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} + p_1 \left(\eta \frac{\partial p_1}{\partial \sigma} + \zeta \frac{\partial q_1}{\partial \sigma} - q_1 + \frac{\partial q}{\partial \sigma} \right) - \\ &- w \frac{\partial q_2}{\partial \sigma}. \end{aligned} \right.$$

En la lastaj derivoj estas utiligitaj (4,12), (4,16), sed ni bezonas ankoraŭ — el (4,13) kaj (4,17) — :

$$(4,19) \left\{ \begin{aligned} w \frac{\partial p_2}{\partial \sigma} &= m_2 w_1 - p_3 w, \\ w \frac{\partial q_2}{\partial \sigma} &= p_2 w_1 - q_3 w, \end{aligned} \right.$$

$$(4,20) \quad p_3 = \frac{6 p_2 - y m_2}{2 \sigma}, \quad q_3 = \frac{7 q_2 - y p_2}{2 \sigma}.$$

Stariĝu ĉe la triaj derivoj (la vojo restas la sama, sed la kalkuloj ĉiam pli komplikaj). Por trovi la seriojn f , g ni devas trovi la „nulajn valorojn”, t. e. la valorojn kiujn oni havas preninte $\eta = 0$, $\sigma = 0$. Unue ni havas y_0 el (4,1), sekve el

$$(4,21) \quad y_0 + \frac{1}{6} y_0^3 = \varepsilon = \frac{t - t_0}{r \sqrt{r}}.$$

Post tio (4,5) tuj donas

$$(4,22) \quad m_0 = y_0, \quad p_0 = \frac{1}{2} y_0^2 = y_1, \quad q_0 = \frac{1}{3!} y_0^3 = y_2,$$

kie pro mallongeco estas signita

$$(4,23) \quad y_{i-1} = \frac{1}{i!} y_0^i.$$

Same mallonge la nulajn valorojn de la derivoj

$\frac{\partial y}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ ktp. signu y_η , y_σ , ..., do

$$(4,24) \quad y_\eta = \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right)_0, \quad p_{\eta\eta} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \right)_0, \\ p_{\eta\sigma} = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \eta \partial \sigma} \right)_0, \quad q_{\sigma\sigma} = \left(\frac{\partial^2 q}{\partial \sigma^2} \right)_0, \dots$$

La limvalorojn (4,7), kiam $\sigma \rightarrow 0$, ni povas trovi ĉu senpere (unue espriminte ilin eksplice) ĉu per apliko de la regulo de *L'Hospital*, ligite kun la valoroj (4,6), ekz.

$$2 m_{1,0} = m_\sigma - y_\sigma - y_0 \left[-\frac{\sin \alpha}{2 \sqrt{\sigma}} \left(2 \sigma \frac{\partial y}{\partial \sigma} - y \right) \right] \\ = y_{\sigma_2} - m_{1,0} - y_\sigma \left[\frac{1}{2} y_0^3 \left(\frac{\sin \alpha}{y \sqrt{\sigma}} \right)_0 \right], \\ 3 m_{1,0} = \frac{1}{2} y_0^3.$$

Tiel oni trovas

$$(4,25) \quad m_{1,0} = y_2, \quad p_{1,0} = y_3, \quad q_{1,0} = y_4, \quad w_0 = 1 + y_1, \\ w_{1,0} = y_2 + y_4.$$

Samvoje (4,17) kaj (4,13), ankaŭ la disvolvita (4,20), donos

$$(4,26) \quad \left\{ \begin{aligned} m_2 &= y^5 \cdot \frac{3 \sin \alpha - 3 \alpha \cos \alpha - \alpha^2 \sin \alpha}{4 \alpha^5} \xrightarrow{(\sigma \rightarrow 0)} \frac{2 y^5}{5!} = \\ &= 2 y_4, \quad p_2 \rightarrow 2 y_5, \quad q_2 \rightarrow 2 y_6; \\ p_3 &\rightarrow \frac{6 y^8}{8!} = 6 y_7, \quad q_3 \rightarrow 6 y_8 \quad (\sigma \rightarrow 0). \end{aligned} \right.$$

Kun tiel trovitaj limvaloroj ni trovas:

$$(4,27) \quad w_0 y_\eta = -y_1, \quad w_0 y_\sigma = y_2 + y_4, \\ m_\eta = y_\eta, \quad p_\eta = y_0 y_\eta, \quad q_\eta = y_1 y_\eta, \\ m_\sigma = y_\sigma - y_2 = -q_\sigma, \quad p_\sigma = y_0 y_\sigma - y_3, \\ q_\sigma = y_1 y_\sigma - y_4 = \frac{9 y_4}{w_0} = y_2 - y_\sigma;$$

$$w_0 p_{\eta\eta} = -q_\eta (5 + 2 y_\eta),$$

$$w_0^3 p_{\eta\sigma} = y_4 (y_1^2 - 2 y_1 - 5) = \\ = w_0^2 \left(2 y_\eta y_\sigma + y_1 q_\sigma + \frac{5}{6} y_0 q_\eta \right),$$

$$w_0 p_{\sigma\sigma} = -y_\sigma (2 y_1 y_\sigma + w_0 q_\sigma) + \\ + \frac{5}{3} y_0 (q_\sigma - 3 y_6);$$

$$w_0 q_{\eta\eta} = y_\eta p_\eta (2 w + 1),$$

$$q_{\eta\sigma} = y_\eta \left(\frac{w+1}{w} p_\sigma - q_\eta \right),$$

$$w_0 q_{\sigma\sigma} = y_\sigma (p_\sigma - y_3) + 2 (y_1 q_\sigma + y_6);$$

$$w_0^2 m_{\eta\eta} = -p_\eta (1 + w_0),$$

$$w_0^2 m_{\eta\sigma} = -p_\sigma + y_1^3,$$

$$m_{\sigma\sigma} = -q_{\sigma\sigma};$$

$$p_{1,\sigma} = y_2 y_\sigma - 2 y_5 - \frac{1}{3} y_0 q_\sigma,$$

$$q_{1,\sigma} = y_3 y_\sigma - 2 y_6;$$

$$w_0^2 p_{\eta\eta\eta} = -3 y_0 p_{\eta\eta} - y_\eta p_\eta (6 + y_\eta) = \\ = + w_0^{-2} y_0 q_\eta (21 + 20 y_1 + 5 y_1^2),$$

$$w_0^2 p_{\eta\eta\sigma} = -2 y_\eta p_\sigma (3 + 2 w_0) + \\ + y_1 q_\eta (6 + 8 w_0 - 5 w_0^2),$$

$$w_0^2 p_{\eta\sigma\sigma} = -2 w_0 p_{\eta\sigma} (p_\sigma - y_1) + \\ + 6 p_\sigma (3 y_4 - y_2) + y_1 w_0 q_{\sigma\sigma} - y_0 p_{\sigma\sigma}, \\ w_0 p_{\sigma\sigma\sigma} = q_{\sigma\sigma} (2 w_0 y_\sigma + 2 w_0 y_2 + 3 y_0 + 2 y_2) - \\ - p_{\sigma\sigma} (3 p_\sigma - 2 y_1 + y_3) - \\ - q_\sigma \left(2 y_\sigma p_\sigma + 11 y_2 + 7 y_4 + 4 y_\sigma + \frac{2}{3} q_\sigma \right) + \\ + \frac{3}{2} y_4 \left(y_4 + 2 y_2 - \frac{1}{14} y_2 \right);$$

$$w_0^2 q_{\eta\eta\eta} = -3 y_0 q_{\eta\eta} - y_\eta q_\eta (1 + 9 w_0), \\ w_0 q_{\eta\eta\sigma} = -3 q_{\eta\eta} (p_\sigma - y_1) - 2 p_\eta q_\eta + \\ + y_\eta q_\eta (4 w_0 + 10 - y_\eta), \quad w_0 q_{\eta\sigma\sigma} = \\ = -2 q_{\eta\sigma} (p_\sigma - y_1) + y_\eta p_{\sigma\sigma} (w_0 + 1) + \\ + 2 p_\sigma (q_\eta - p_\sigma), \quad w_0 q_{\sigma\sigma\sigma} = \\ = -q_{\sigma\sigma} (2 p_\sigma - 3 y_1 - y_3) + y_\sigma p_{\sigma\sigma} + \\ + \frac{1}{3} q_\sigma (11 p_\sigma - 7 y_3) + y_5 \left(2 y_\sigma - \frac{1}{14} y_2 \right)$$

Por efektivi diversajn aliformigojn, estis utilaj la sekvantaj ligaĵoj inter la diversgradaj esprimoj (4,23):

$$(4,28) \quad \left\{ \begin{aligned} y_1 y_2 &= 10 y_4, \quad y_1 y_3 = 15 y_5, \quad y_1 y_4 = 21 y_6, \\ y_1 y_5 &= 28 y_7, \quad y_2 y_3 = 5 y_0 y_5 = 35 y_6, \\ y_2 y_4 &= 2 y_1 y_5 = 56 y_7 = 7 y_0 y_6, \quad y_2 y_5 = \frac{7}{3} y_1 y_6, \\ y_2 y_6 &= \frac{8}{3} y_1 y_7, \quad y_3 y_4 = \frac{7}{2} y_1 y_6, \quad y_3 y_5 = 210 y_9, \\ y_4 y_5 &= \frac{7}{30} y_1^2 y_6, \quad y_0 y_3 y_4 = y_1^2 y_5, \\ y_1^2 &= 6 y_3 = -w_0 q_\eta, \quad y_0 y_1^2 = 30 y_4, \quad y_2^2 = 20 y_5, \\ y_4^2 &= \frac{1}{5} y_1^2 y_5, \quad y_0 y_1 y_2 = 60 y_5. \end{aligned} \right.$$

Estis utilaj ankaŭ la esprimoj:

$$(4,29) \quad \left\{ \begin{aligned} q_{1,\sigma\sigma} &= y_\sigma (y_2 y_\sigma - 4 y_5) + y_3 (2 q_\sigma - q_{\sigma\sigma}) + 6 y_8, \\ p_{1,\sigma\sigma} &= y_\sigma (y_1 y_\sigma - 4 y_4) + y_2 (2 q_\sigma - q_{\sigma\sigma}) + 6 y_7, \end{aligned} \right.$$

kaj la ligaĵoj:

$$(4,30) \quad \left\{ \begin{aligned} q_{1,\sigma} - y_4 + q_\sigma &= y_\sigma (p_\sigma - y_1) + w_0 (2 q_\sigma - q_{\sigma\sigma}), \\ 21 y_6 &= 6 y_3 y_\sigma - y_1 q_\sigma, \quad 1 + y_\eta = \frac{1}{w_0}, \\ y_0 + p_\eta &= \frac{y_0}{w_0}, \quad y_0 p_\sigma = 2 q_\sigma - 3 y_4 = \\ &= q_\sigma \left(2 - \frac{w_0}{3} \right), \quad y_1 p_\sigma = y_0 q_\sigma \left(1 - \frac{w_0}{6} \right). \end{aligned} \right.$$

La esprimoj (4, 27), kune (4; 2, 3, 21, 22) donos la seriojn:

$$(4,31) \quad \begin{cases} f = \left(1 - \frac{1}{2} y_0^2\right) - (\gamma p_{\gamma} + \sigma p_{\sigma}) - \frac{1}{2} (\gamma^2 p_{\gamma\gamma} + \\ + 2\gamma\sigma p_{\gamma\sigma} + \sigma^2 p_{\sigma\sigma}) - \frac{1}{3!} (\gamma^3 q_{\gamma\gamma\gamma} + \dots) - \\ g = (t - t_0) - r \left[\frac{1}{3!} y_0^3 + (\gamma g_{\gamma} + \sigma g_{\sigma}) + \right. \\ + \frac{1}{2} (\gamma^2 q_{\gamma\gamma} + 2\gamma\sigma q_{\gamma\sigma} + \sigma^2 q_{\sigma\sigma}) + \\ \left. + \frac{1}{3!} (\gamma^3 q_{\gamma\gamma\gamma} + \dots) + \dots \right], \\ \sigma = 1 - \zeta - 2 - r v^2, \quad \gamma = \frac{(r v)}{\sqrt{r}}. \end{cases}$$

Do ankaŭ en la preskaŭparabola kazo ni havas la seriojn por f, g , simile al la elipsa (preskaŭcirkla) kazo. Ju pli la (elipsa aŭ hiperbola) moviĝo devias de la parabolo, des pli ni evitados la seriojn (4,31), uzante rekte la fermitan formularon (4,1), (4,2), (4,3).

5) La konkludoj

El ĉio tio oni povas klare fari la firmajn konkludojn:

1) En la preskaŭparabola (aŭ parabola) moviĝo oni povas kaj utilas uzi la ĝeneralan ekvacion (1,14) kaj la formularon (4;1—3), aŭ la seriojn

(4,31) — la solvoj estos ĉiam realaj kaj la novajn poziciojn oni povas facile trovi per la formulo (0,6).

2) En pure hiperbola moviĝo ne ĉiam eblas utiligo de la ĝenerala ekvacio (1,14), sed oni devas uzi la formularon (2,21), (2,22), almenaŭ kiam oni kalkulas ankaŭ la malproksimajn poziciojn.

3) En pure elipsa moviĝo la novajn poziciojn, t.e. la kvantojn f, g el (0,6) ni trovas plej simple per la fermita formularo (3,5), aŭ (3,6) kune kun (3,4), aŭ per utiligo de la serioj (3,7), (3,8).

La „ĝenerala ekvacio“ estas fakte ne ĝenerala, sed specialigita por preskaŭparabola (kaj parabola) kazo.

LA MENCITA LITERATURO:

[1] Bower E.: „Some formulas and tables...“, Lick. Obs. Bulletin 445 (1932), p. 34.

[2] Leuschner: „Short Methods of determining orbits“, Publ. Lick Observ. VII.

[3] Milankovič M.: „Über die Verwendung vektorieller Bahnelemente in der Störungsrechnung“, Bulletin de l'Acad. serbe A6 (1939), 1—68.

[4] Popović B.: „Odrediyanje vektorskih elemenata...“ (Eltrovado de vektoraj elementoj de planedetorbitoj), Radovi Naučnog dr. B. H., Sarajevo, XI (1958), p. 97—148.

[5] Popović B.: „Nove formule i tablice...“, Rasprave Jug. akad. zn. i umj., Zagreb (1956), I, 7, pp. 199—222.

[6] Popović B.: „Eltrovado de vektoraj elementoj...“, Vesnik Dr. mat. fiz., Beograd, IX (1957), pp. 37—54; Bilten Dr. mat. fiz., Skopje, VIII (1957).

[7] Stumpf K.: „Neue Theorie und Methode der Ephemeridenrechnung“, Abhandlungen Ak. Wiss. Berlin, Math.-nat. Klasse I (1947), pp. 1—88.

L'EXAMEN DES NIVEAUX DE LA LUNETTE ZÉNITHALE PAR LA MÉTHODE DE VASSILIEV

par G. TELEKI

1. Les niveaux de la lunette zénithale de l'Observatoire furent examinés par la méthode de Vassiliev [1]. La méthode est décrite en détail aussi dans les publications [2] et [3]. On a examiné le niveau supérieur (A) de Talcott, gradué de 50—90, le niveau inférieur (B) de Talcott, gradué de 0—40 et le niveau à l'axe des tourillons (C), gradué de 0—60. Les mesures furent faites à l'

en séries de mesures, une série contenant 7 mesures en sens direct et le même nombre en sens inverse. L'intervalle de temps entre deux mesures consécutives durait toujours 2 minutes. La température pendant tout l'examen variait autour de $+12^{\circ}7$ C. Les variations restaient audessous de 1° C pendant les mesures avec une longueur de la bulle.

À chaque groupe on a appliqué l'équation de condition

$$x + (\beta_i - \beta_o) y + (t_i - t_o) z = l_i + \lambda \quad (1)$$

où sont:

$$\frac{\tau}{2} \quad \frac{1}{2} (I + II)$$

$$A \quad (I - II)$$

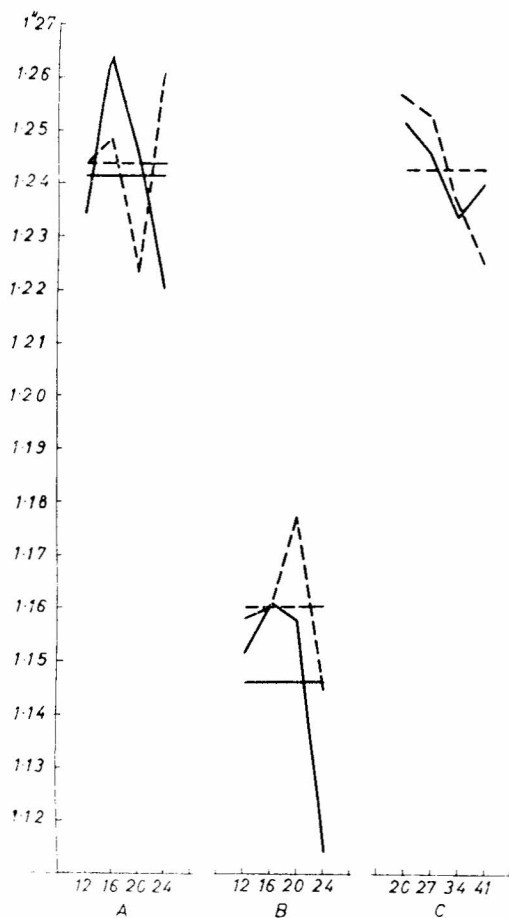


Fig 1

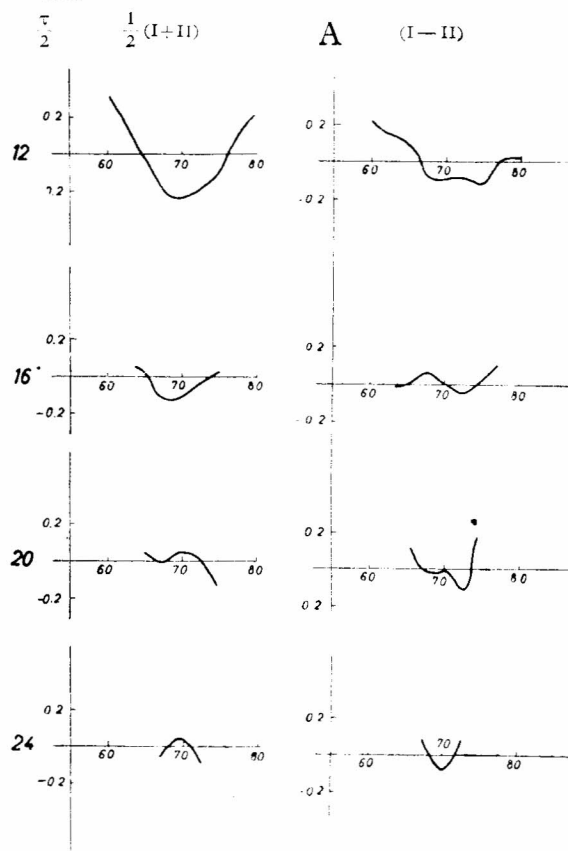


Fig 2

examineur du type classique de la maison Askania — Bamberg, Berlin, № 50231.

Pour tous les trois niveaux on a fait les mesures avec quatre longueurs de la bulle. Les niveaux de Talcott furent examinés avec les longueurs de 12, 16, 20 et 24 parties et le niveau C avec les longueurs de 20, 27, 34 et 41 parties. Avec chaque longueur de la bulle on a exécuté deux groupes de mesures. Chaque groupe consistait

x — la position de la bulle pour la position de l'examineur β_o ,

β_o — la position initiale de l'examineur,

β_i — une position quelconque de l'examineur,

$y = \frac{\eta}{\tau}$ — le rapport de la valeur d'un tour η de l'examineur et d'une demi-partie $\frac{\tau}{2}$ du niveau,

t_i et t_o — les temps correspondant aux positions β_i et β_o de l'examineur,

z — l'influence de l'examineur à la bulle du niveau en fonction de temps,

l_i — la position de la bulle correspondant à β_i ,

λ — l'erreur de la détermination l contenant non seulement les erreurs des lectures des bouts de la bulle, mais aussi celles provenant de l'irrégularité de la courbure et d'imperfection de polissage du tube.

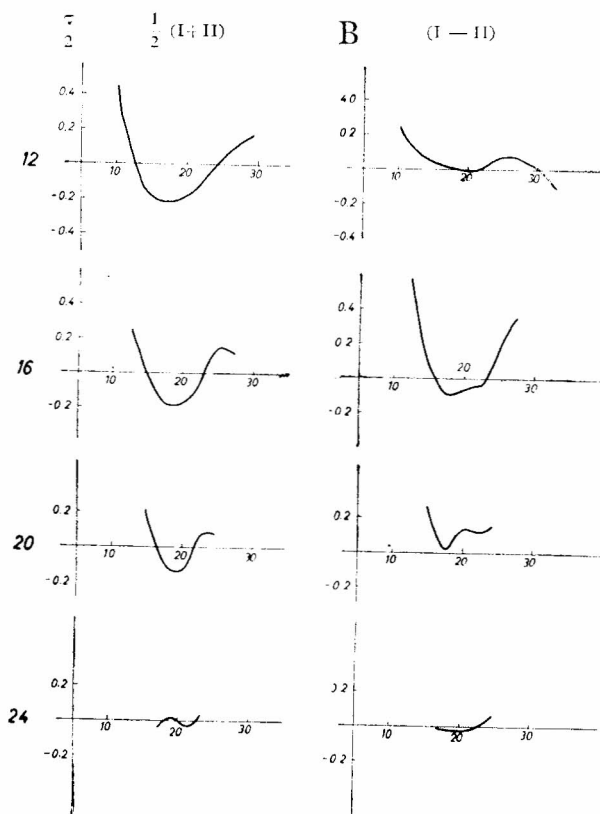


Fig 3

2. Résolvant les équations normales correspondant aux équations de condition du type (1) pour chaque groupe séparément, on obtient les valeurs x, y, z et ensuite les caractéristiques d'un niveau pour une longueur de la bulle.

I groupe		II groupe		I groupe		II groupe	
Niveau A		Niveau B		Niveau C		Niveau D	
12	1.2346	1.2438	± 0.0091	12	1.1514	1.1581	± 0.0093
16	1.2650	1.2484	± 0.0064	16	1.1608	1.1601	± 0.0108
20	1.2453	1.2225	± 0.0108	20	1.1574	1.1778	± 0.0114
24	1.2202	1.2610	± 0.0060	24	1.1142	1.1442	± 0.0155
$\tau_m, \mu\tau_m$	1.2413	1.2439	± 0.0083	$\tau_m, \mu\tau_m$	1.1460	1.1600	± 0.0120
$\tau_o, \mu\tau_o$	1.2426		± 0.0090	$\tau_o, \mu\tau_o$	1.1530		± 0.0108

I groupe		II groupe		I groupe		II groupe	
Niveau B		Niveau C		Niveau D		Niveau E	
20	1.2516	1.2563	± 0.0039	20	1.2516	1.2563	± 0.0039
27	1.2453	1.2531	± 0.0039	27	1.2453	1.2531	± 0.0039
34	1.2338	1.2361	± 0.0038	34	1.2338	1.2361	± 0.0038
41	1.2399	1.2247	± 0.0046	41	1.2399	1.2247	± 0.0030
$\tau_m, \mu\tau_m$	1.2426	1.2426	± 0.0041	$\tau_m, \mu\tau_m$	1.2426	1.2426	± 0.0037
$\tau_o, \mu\tau_o$	1.2426		± 0.0039	$\tau_o, \mu\tau_o$	1.2426		± 0.0039

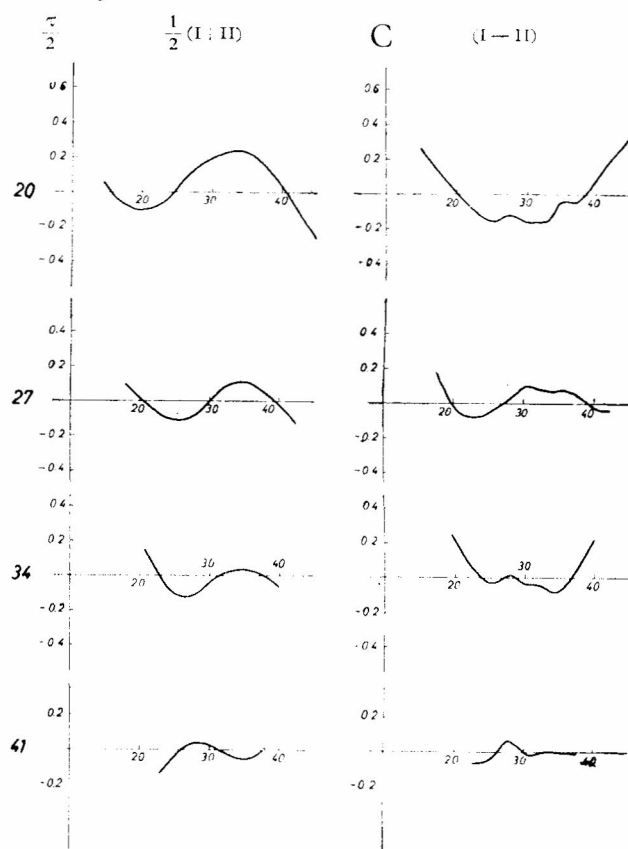


Fig 4

La Table 1 contient les valeurs de la partie τ pour tous les trois niveaux — pour chaque groupe et pour chaque longueur de la bulle — et les valeurs moyennes des groupes τ_m et définitive τ_o de la partie. Dans la même table sont données les valeurs des erreurs moyennes quadratiques $\mu\tau$ des parties déterminées τ . Les valeurs τ sont données, pour plus d'évidence, même à la Fig.1. Les valeurs obtenues dans le premier groupe sont

représentées par la ligne continue et celles obtenues dans la deuxième par la ligne discontinue. Les lignes horizontales représentent les valeurs moyennes correspondantes. Les lignes horizontales pour le niveau C coïncident. À l'axe des abscisses on a apporté les valeurs de la longueur de bulle pour lesquelles on a fait les examinations.

Les valeurs λ tendent les meilleures caractéristiques sur la qualité des niveaux. Les courbes

adoussies des valeurs sont données pour chaque groupe. Aux Fig. 2, 3 et 4 on a donné les courbes adoussies des valeurs moyennes de λ déterminées en I et en II groupe [signe $\frac{1}{2} (I + II)$] et des différences des valeurs λ déterminées en I et en II groupe [signe $(I - II)$]. Les valeurs sont adoussies par la méthode des barycentres pour chaque longueur de bulle.

3. À la Table 2 sont donnés:

TABLE 2

Niveau	A	B	C
d	12, 16, 20, 24	12, 16, 20, 24	20, 27, 34, 41
D	4, 3, 2, 1	4, 3, 2, 1	5, 4, 3, 2
T	13.0, 12.2, 12.7, 13.1	11.9, 11.8, 12.2, 12.2	13.0, 13.2, 13.4, 13.6
Δd	0.4	0.6	0.5
p	1.2426 $\pm$ 0.0090	1.1530 $\pm$ 0.0108	1.2426 $\pm$ 0.0039
z	0.035	0.110	0.040
μ_a	$\pm$ 0.06	$\pm$ 0.07	$\pm$ 0.11
λ	0.34	0.42	0.30
a	20	24	41

d — les longueurs de la bulle (en parties) pour lesquelles on a fait l'examenation,

D — les déplacements correspondants (en secondes d'arc) de la vis micrométrique de l'examineur,

T — la température moyenne pour les mesures correspondantes,

Δd — la variation maximum de la longueur de bulle (en parties) au cours des mesures correspondantes,

p — la valeur moyenne de la partie,

z — la valeur maximum absolue du membre z,

μ_a — la valeur maximum (en parties) de l'erreur moyenne quadratique de lecture des bouts de la bulle,

λ — la valeur maximum du membre λ ,

a — la longueur initiale de la bulle en partant de laquelle on ne sent plus l'influence de l'irrégularité du tube.

Des tables et figures ci-jointes on peut remarquer que les niveaux de Talcott peuvent être de qualité très différente. Cette différence se manifeste à toutes les données. La dispersion du membre z fut surtout accentuée pour le niveau B. Sa valeur de 0.11 fut sensiblement audessus de la limite de 0.05 posée dans la publication [2]. Cependant il faut noter que cette valeur maximum fut obtenue dans la première mesure et, par conséquent, peut provenir de l'inexpérience de l'opérateur.

On voit des données ci-jointes qu'il ne faut effectuer des mesures à l'aide des niveaux de Talcott examinés qu'avec les bulles plus longues de 20 parties. Seulement sous ces conditions les influences des irrégularités des niveaux sur l'inclinaison mesurée seront négligeables.

4. La méthode de Vassiliev demande que les mouvements de la bulle pendant l'examenation ne sortent pas des limites de 2—4". Nous avons essayé faire une exception. On a examiné les niveaux de Talcott même avec les mouvements de la bulle de 1" et le niveau C même avec les mouvements de 5". Notre but fut de vérifier la légitimité de la condition citée, d'une part, et d'utiliser même ces mesures pour l'examen des qualités des niveaux en question.

Si nous considérons les valeurs τ pour les niveaux A et B pour la longueur de bulle de 24 parties (quand son mouvement fut de 1"), nous remarquons une grande différence entre les valeurs de τ pour les deux niveaux. De plus, pendant que les valeurs déduites du I et du II groupe pour le niveau A tombent assez symétriquement autour de la valeur moyenne τ_0 , ce n'est pas le cas pour le niveau B. De cette manière nous avons obtenu encore une indication que la qualité du niveau B est plus faible. Quant au niveau C, le mouvement de 5" à 5", produit sur la longueur de bulle de 20 parties ne donne aucune dispersion sensible.

Ces exemples montrent qu'il faut accepter les limites de 2—4" posées pour le mouvement de

bulle pendant l'examen par la méthode envisagée, mais il faut remarquer que les mesures hors de ces limites donnent aussi l'idée sur les qualités d'un niveau. Nous avons ainsi constaté que notre niveau C possède de très bons qualités.

Si nous rejetons les valeurs obtenues pour les mouvements de la bulle se distinguant de 2,3 et 4'', τ_0 obtient les valeurs suivantes:

Niveau A	$\tau_{OA} = 1.2432 \pm 0.0074$
„ B	$\tau_{OB} = 1.1609 \pm 0.0098$
„ C	$\tau_{OC} = 1.2388 \pm 0.0037$

On remarque que pour toutes les trois valeurs les erreurs moyennes quadratiques se sont diminuées. Ce fait soutient aussi la conclusion qu'il ne faut pas sortir des limites de 2—4'' pour le mouvement de la bulle.

5. L'examen ci-décrit est le premier de son espèce pour les niveaux de la lunette zénithale de l'Observatoire de Beograd. La nécessité de son prolongement s'impose et surtout l'examen aux températures différentes.

La méthode appliquée et assez longue, mais elle donne une idée claire sur les qualités des niveaux des instruments en question destinés aux mesures très délicates.

LITTÉRATURE:

- [1] A. C. Васильев: „Известия АН СССР“ 1925.
- [2] П. Н. Долгов: „Определение времени пассажным инструментом в меридиане“, Москва, 1952.
- [3] „Инструкция по астрономическим определениям пунктов I, II, III и IV классов“, „Геодезиздат“, 1948.

SUR LA CONFORMITÉ DE LA DÉTERMINATION DE LA CONSTANTE MICROMÉTRIQUE À L'AIDE DES COUPLES ZÉNITHALES DU CATALOGUE DE WASHINGTON

par G. TELEKI

1. É. P. Fédorov [1] a composé un nouveau programme pour la détermination de la valeur angulaire du tour de la vis micrométrique de la lunette zénithale. Pour ce but il a utilisé le Catalogue des étoiles zénithales de l'Observatoire de Washington [2]. Ce catalogue contient 64 étoiles observées de

1916—1924 au tube zénithale de Washington. Il passe pour très bon et exact. De leurs étoiles Fédorov a composé 18 couples pour la détermination de la constante micrométrique.

À l'Observatoire de Beograd on a composé un programme semblable qui contient 20 couples (Table 1).

TABLE 1

Couple	Nº	BD	R. A. 1925.0	Mag.	Dekl. 1925.0	Cent. var.	2nd Term	3rd Term	$\mu\delta$	$\Delta\mu\delta$	Epoch
					38° +						1900 +
1	4	+38°472	2h19m 33s	7.7	60° 22.253	+1643.67	-15.75	-0.24	-0.56	-0.01	29.4
	5	+38 491	2 25 17	6.9	48 12.642	+1613.84	-16.35	— .24	1.22	— .00	29.4
2	4	+38 472	2 19 33	7.7	60 22.253	+1643.67	-15.75	— .24	-0.56	— .01	29.4
	7	+38 527	2 34 10	7.9	49 35.153	+1567.64	-17.34	— .24	-0.18	— .01	29.4
3	8	+38 690	3 12 54	6.0	60 31.973	+1333.84	-21.40	— .23	-1.59	— .02	29.4
	9	+38 737	3 26 14	7.2	53 32.202	+1243.50	-22.66	— .22	-2.70	— .03	29.4
4	11	+38 834	3 57 28	7.6	53 21.146	+1017.90	-25.34	— .19	-3.41	— .03	29.4
	12	+38 848	4 5 19	6.8	61 47.864	+ 959.26	-25.95	— .18	-2.48	— .01	29.4
5	16	+39 1713	6 37 24	7.0	57 59.028	— 334.87	-29.68	+ .08	-9.18	+ .02	29.1
	17	+39 1736	6 40 49	7.2	62 56.043	— 355.74	-29.62	+ .08	-0.66	+ .01	29.1
6	17	+39 1736	6 40 49	7.2	62 56.043	— 355.74	-29.62	+ .08	-0.66	+ .01	29.1
	18	+39 1771	6 47 52	6.1	57 36.790	— 415.16	-29.36	+ .09	+0.44	— .00	29.1
7	19	+38 1731	7 13 46	7.0	48 36.013	— 633.80	-28.17	+ .14	+0.28	— .01	29.1
	21	+39 1958	7 26 50	6.5	63 19.200	— 744.20	-27.42	+ .16	-2.74	+ .05	29.1
8	20	+38 1760	7 22 29	7.0	49 5.323	— 709.56	-27.68	+ .15	-3.67	— .00	29.1
	21	+39 1958	7 26 50	6.5	63 19.200	— 744.20	-27.42	+ .16	-2.74	+ .05	29.1
9	22	+38 1861	8 2 49	7.0	47 53.032	—1025.70	-24.82	+ .20	-2.14	+ .01	26.7
	23	+39 2065	8 6 23	6.5	57 19.971	—1058.37	-24.47	+ .20	-8.12	+ .20	31.7
10	22	+38 1861	8 2 49	7.0	47 53.032	—1025.70	-24.82	+ .20	-2.14	+ .01	26.7
	24	+39 2082	8 12 58	7.7	62 1.479	—1100.73	-24.02	+ .21	-1.98	— .00	28.7
11	25	+39 2193	8 59 0	6.7	62 22.603	—1413.94	-19.58	+ .24	-2.78	+ .01	29.2
	26	+39 2223	9 10 14	6.8	55 7.468	—1471.75	-18.27	+ .24	+7.53	+ .10	28.7
12	37	+39 3071	16 57 59	7.2	61 6.980	— 540.34	+14.39	+ .02	-4.60	+ .02	28.9
	39	+38 2910	17 15 52	6.0	53 14.976	— 376.24	+14.48	+ .02	+7.37	— .02	28.9
13	38	+39 3091	17 10 56	7.2	64 18.700	— 427.81	+14.43	+ .02	-1.95	+ .01	28.9
	39	+38 2910	17 15 52	6.0	53 14.976	— 376.24	+14.48	+ .02	+7.37	— .02	28.9
14	41	+38 2997	17 43 24	6.5	54 35.955	— 148.26	+14.55	+ .01	-3.17	— .00	28.9
	42	+38 3025	17 50 12	7.2	50 10.440	— 85.98	+14.56	— .00	-0.35	— .01	28.9
15	47	+38 3441	19 5 14	7.5	48 30.945	+ 563.43	+14.17	— .02	+0.51	+ .01	29.1
	49	+38 3520	19 14 46	6.6	59 7.546	+ 640.79	+14.02	— .02	-1.61	+ .01	29.1
16	51	+38 3862	19 57 53	7.1	59 59.463	+ 986.25	+13.31	— .04	+0.09	+ .01	29.1
	52	+38 3963	20 11 13	7.0	55 49.092	+1088.09	+13.08	— .05	+2.17	+ .05	29.1
17	52	+38 3963	20 11 13	7.0	55 49.092	+1088.09	+13.08	— .05	+2.17	+ .05	29.1
	53	+38 4003	20 16 14	6.7	46 6.248	+1122.50	+12.94	— .05	-0.04	— .01	32.2
18	54	+38 4187	20 38 12	6.4	48 52.063	+1276.64	+12.34	— .06	+0.30	— .00	29.2
	55	+38 4235	20 45 10	7.0	60 37.080	+1322.57	+12.08	— .06	-0.17	— .01	29.2
19	59	+38 4858	22 41 29	6.6	48 25.630	+1886.68	+ 6.24	— .11	-1.31	+ .01	29.2
	60	+38 4904	22 54 13	6.1	54 27.132	+1922.22	+ 5.30	— .12	-0.22	— .00	29.2
20	62	+38 4999	23 22 23	6.8	55 38.699	+1976.12	+ 3.03	— .14	-1.41	— .00	32.3
	63	+38 5023	23 27 36	5.3	49 26.724	+1976.66	+ 2.63	—0.14	-7.81	+0.05	29.3

Le critère pour l'élection des étoiles consistait en 4 conditions: 1. la différence des ascensions droites des étoiles dans une couple ne doit pas dépasser 15^m; 2. la différence des déclinaisons doit dépasser 4' ou 6 tours de la vis micrométrique; 3. la différence en magnitude ne doit pas être plus grande de 1^m 5, et 4. les étoiles ne doivent pas sortir en magnitude des limites de 6.0—7.9. À ces conditions n'obéit pas seulement la couple 12 par sa différence en ascension droite de 18^m.

Nous étions obligés d'éliminer les couples 1, 2, 13 et 17 du programme de Fédorov à cause de leurs petites magnitudes au-dessus de 7^m 9 et la couple 11 à cause d'une grande différence en magnitude des composantes (3^m 0). Par conséquent dans notre programme les couples 1, 2, 7, 11, 12, 13 et 16 sont nouvelles et ne se trouvent pas dans le programme de Fédorov. La Table 2 donne les couples communes pour les deux programmes et leur nummération.

TABLE 2

Programme de Fédorov	3	4	5	6	7	8	9	10	12	14	15	16	18
Notre programme	3	4	5	6	8	9	10	14	15	17	18	19	20

2. Nous avons déduit la formule suivante pour la détermination de la correction du tour de la vis micrométrique

$$\Delta R = \frac{(\delta_1 - \delta_2) - (\Delta M \cdot R_0 + \alpha\beta\gamma \sec^2 z \, dz \sin l') \pm \beta}{\Delta M}$$

où sont:

ΔR — la correction du tour micrométrique relativement à une valeur initiale (R_0) qui fut 40."1582;

δ_i — la déclinaison pour l'époque moyenne d'observation que l'on obtient par la formule

$$\delta_i = \delta_{1925.0} + T \cdot I - T^2 \cdot II + T^3 \cdot III + \mu_\delta \cdot T_i + \Delta\mu_\delta \cdot \frac{T_i}{10} + Aa' + Bb' + Cc' + Dd' + \mu_\delta \tau$$

où sont: I, II, III, le premier, le second et le troisième membre de la variation de δ , T l'intervalle de temps depuis 1925.0 en unités de 100 ans, μ_δ la valeur du mouvement propre en 100 ans, $\Delta\mu_\delta$ la variation millénaire du mouvement propre, T_i l'intervalle de temps commençant par l'époque d'étoile en unités de 100 ans;

ΔM — la différence des lectures micrométriques libérée des erreurs progressives et périodiques de la vis. Le signe de ΔM correspond au signe de $(\delta_1 - \delta_2)$;

$\alpha\beta\gamma \sec^2 z \, dz \sin l'$ — la réfraction déduite de la formule de Bessel $r = \alpha\beta\gamma \tan z$ pour la réfraction. Cette expression est de même signe que ΔM . Pour la réfraction différentielle furent construites deux tables: la première pour la valeur $\alpha\beta\gamma \sin l'$ et la seconde pour $\sec^2 z \, dz$;

β — la variation d'inclinaison pendant l'observation. Pour les observations de la position W, β possède le signe de la différence d'inclinaison entre la première et la seconde étoile. Pour les observations de la position E le signe est contraire.

TABLE 3

Date	Obs.	T_i	Couple	ΔR	$\Delta(\Delta R)$	ΔT_i
1958						
Mai	9	BS	14	-0.127	-0.055	6.2
	11	BS	14	— .112	— .040	8.1
	12	VM	14	— .124	— .052	9.2
	13	VM	14	— .046	+ .026	6.2
	14	GT	12	— .325	— .253	8.0
			13	— .147	— .075	8.0
			14	— .116	— .044	8.0
	15	GT	14	— .170	— .098	8.2
	24	BS	14	— .171	— .099	5.0
Juin	1	VM	14	— .107	— .035	4.2
	2	GT	14	— .051	+ .021	5.2
	5	BS	14	— .102	— .030	1.2
	6	GT	14	— .158	— .086	0.9
	7	BS	14	— .073	+ .021	0.3
	9	VM	14	— .115	— .043	6.2
	17	BS	14	— .122	— .050	4.1
	20	BS	14	— .087	— .015	9.4
	30	BS	14	— .098	— .026	4.3
Juill.	7	BS	14	— .081	— .009	6.3
Août	28	GT	16	— .172	— .100	5.5
			17	+ .031	+ .103	5.5
Déc.	4	GT	1	+ .068	+ .149	-16.8
			2	+ .042	+ .114	-16.8
			3	+ .018	+ .090	-16.8
			5	+ .405	+ .477	-17.2
			6	— .031	+ .041	-17.2
			7	— .062	+ .010	-17.2
			8	+ 0.008	+ 0.080	-17.2

$$T_{i,m} = 12.8$$

$$\Delta R_m = -0.0723$$

Pour la réduction on prend toujours la différence entre les données pour la première et la seconde étoile avec le signe correspondant.

On n'a pas tenu compte de la correction différentielle provenant de la courbure du parallèle et de la variation de la réfraction différentielle avec le changement des conditions atmosphériques au cours d'observation d'une couple [3], ces influences étant négligeables.

3. Dans le laps de temps du 9 mai au 4 décembre on a observé au total 28 couples. Dans cet ensemble le 14. couple fut observé 17 fois et les couples 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 16 et 17 seulement une fois. La température de l'instrument pendant ces mesures variait de -4.4 à 22.3 C. La Table 3 donne la date d'observation, nom d'observateur (BS—B. Ševarlić, VM—V. Milovanović, GT—G. Teleki), la température de l'instrument (T_i), numéro du couple observé, la valeur ΔR , la valeur $\Delta(\Delta R) = \Delta R - \Delta R_m$ et la valeur $\Delta T_i = T_i - T_{i,m}$ (l'index dénote la valeur moyenne).

Si nous dénotons par α le coefficient thermique, du micromètre, nous pouvons poser les équations de condition suivantes

$$(\Delta T_i) \alpha = \Delta(\Delta R).$$

Si nous appliquons cette condition à chaque donnée d'observation nous obtenons par la méthode des moindres carrés la valeur suivante pour α :

$$\alpha = -0.0079 \pm 0.0020.$$

Si nous éliminons l'influence du coefficient thermique sur ΔR , nous obtenons pour la température moyenne $T_{i,m} = +12.8$ C

$$\Delta R_1 = -0.0723 \pm 0.0179.$$

Cependant les valeurs ΔR pour les couples 5, 12 et 17, même corrigées, ne sont pas comparables aux valeurs obtenues des autres couples. Nous avons appliqué le critère statistique de Student-Fisher pour l'élimination des valeurs très discordantes [4] (en deux approximations) avec la probabilité de 0.95 et après cette discussions nous avons supprimé ces couples des calculs suivants. Des 25 valeurs qui ont subi cette contrôle nous avons obtenu

$$\left. \begin{aligned} \Delta R_2 &= -0.0854 \pm 0.0081 \\ \alpha &= -0.0053 \pm 0.0008 \end{aligned} \right\} \text{ pour } T_{i,m} = +13.0 \text{ C.}$$

Ensuite, nous avons essayé de supposer que ΔR dépend non seulement du coefficient thermique α , mais aussi d'un coefficient barométrique β . En ce cas les nouvelles équations de condition seront du type

$$\alpha(\Delta T_i) + \beta(B - B_m) = \Delta(\Delta R),$$

où sont:

B — l'état barométrique pendant la mesure;

B_m — la valeur moyenne de la pression barométrique pour l'ensemble d'observation discutées. Par la méthode des moindres carrés nous avons obtenu

$$\alpha = -0.0049 \pm 0.0003,$$

$$\beta = +0.0015 \pm 0.0011.$$

Si nous corrigeons les valeurs primitives de ΔR par ces influences nous obtenons comme résultat définitif:

$$\Delta R_3 = -0.0856 \pm 0.0080$$

pour $T_{i,m} = +13.0$ C et $B_m = 740$ mm.

Les examinations du dernier temps prouvent qu'il y fut conforme de tenir compte de l'influence du coefficient barométrique.

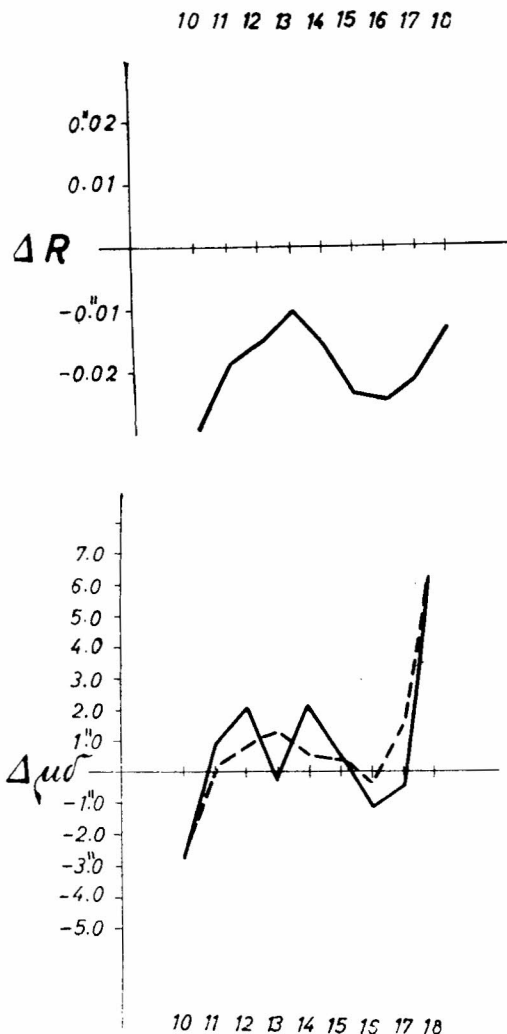
4. 28 observations sont très peu pour en tirer une conclusion sérieuse sur la conformité d'emploi des étoiles zénithales du Catalogue de Washington pour en composer les couples pour la détermination de la constante micrométrique. Cependant une chose a retenu notre attention: les mauvais résultats des couples 5, 12 et 17. Ne tenant compte que des observations traitées ci-dessus on pourrait supposer que les erreurs d'observateurs en sont coupables. Néanmoins des résultats d'observations continuées après le 4 décembre 1958, quand ΔR a obtenu une valeur différente, mais des raisons toutes autres, on voit que la couple 5 donne toujours une valeur plus grande et les couples 11 et 12 des valeurs plus petites de la moyenne. On remarque aussi des observations postérieures que les couples 9 et 11 donnent aussi des valeurs qui diffèrent de la moyenne. La question se propose bien à propos: quelle est la raison de ces différences systématiques?

TABLE 4

	c	o	u	p	l	c
	5	9	11	12	17	
1 *	— 9.18	— 2.14	— 2.78	— 4.60	+ 2.17	
2 *	— 0.66	— 8.12	+ 7.53	+ 7.37	— 0.04	
$\Delta \mu_{\delta}$	— 8.52	+ 5.98	— 10.31	— 11.97	+ 2.21	
ΔR	+	—	—	—	+	

À la Table 4 nous avons donné les valeurs des mouvements propres pour 100 ans en déclinaisons pour les couples 5, 9, 11, 12, et 17—tirées du Catalogue de Washington [2]. On remarque que dans ces couples une étoile possède tou-

jours le mouvement propre plus élevé. Sous $\Delta\mu\sigma = \mu\sigma_1 - \mu\sigma_2$ nous avons donné la différence entre la valeur ΔR de la couple correspondante et la valeur moyenne libérée des influences thermique



et barométrique. On peut remarquer que la valeur ΔR est plus grande pour les couples 5 et 17 où la première étoile possède un mouvement propre plus fort par sa valeur absolue que la deuxième. Pour les couples 9, 11 et 12 la seconde étoile possède un mouvement propre plus fort (par

sa valeur absolue) et ils donnent les valeurs moindres pour ΔR .

Il est difficile de déduire une conclusion définitive du petit matériel d'observation dont nous disposons. Néanmoins on peut constater que les mouvements propres en déclinaisons des étoiles zénithales du Catalogue de Washington ne sont pas assez précis. Cette conclusion est justifiée aussi par la Fig. 1. Y sont données les valeurs ΔR déduites des couples 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 et 18 du programme de Fedorov, publié dans la publication [1]. Sur le graphique en bas on a donné la représentation des valeurs $\Delta\mu\sigma$ et par la courbe discontinue les valeurs adoucies par la méthode des barycentres. On remarque une corrélation entre les courbes ΔR et $\Delta\mu\sigma$.

De l'article de Sollenberger [2] sur la composition du Catalogue des étoiles zénithales de Washington on voit comment sont déterminés les déclinaisons et les mouvements propres de ces étoiles. Ils sont déterminés indirectement partant des latitudes observées. Cette méthode indirecte où l'on déduit les δ et μ_δ d'une courbe idéalisée des latitudes ne peut donner les résultats d'une haute précision. C'est pourquoi le doute que ce catalogue dans l'état actuel, peut servir à son but primitif — détermination précise de la constante micrométrique, nous paraît justifié.

Pour ce motif il nous paraît utile:

1. que l'Observatoire de Poltava déduise de son plus grand matériel d'observation les conclusions sur les déclinaisons et les mouvements propres des étoiles de Washington, et

2. que le Naval Observatory de Washington donne les nouvelles valeurs corrigées de ses étoiles zénithales.

LITTÉRATURE

- [1] Е. И. Федоров, „Труды Полтавской гравиметрической обсерватории“, Том II, 1948, 79
- [2] Paul Sollenberger, „The Astronomical Journal“, Vol. 51, № 5, 1945, 145
- [3] Shigeru Yumi, „Publications of the International Latitude Observatory of Mizusawa“, Vol. II, № 1, 1955, 1
- [4] Ю. В. Линник: Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, Москва, 1958

TABLE DES MATIÈRES

	Page
<i>P. Đurković, Lj. Dačić</i> : Mesures micrométriques d'étoiles doubles	1
<i>B. Ševarlić, G. Teleki, Z. Petović, M. Đokić</i> : Observations à la lunette zénithale	2
<i>Z. Brkić, Lj. Mitić, M. Jovanović</i> : Déterminations de l'heure en 1959	3
<i>Z. Brkić, Lj. Mitić</i> : Heures demi-définitives des émissions enregistrées de T. S. F. déduites des déterminations de l'heure faites en 1959, à l'Observatoire de Beograd	4
* * * : Lunar occultations 1961 visible at Belgrade	7
<i>R. Mitrinović</i> : Sur les petites planètes doublement désignées	9
<i>R. Mitrinović</i> : Identifications, double designations, circular and elliptic elements of minor planets	12
<i>B. Popović</i> : Kalkulado de planed — kaj kometefemeridoj senpere el iliaj pozicio kaj rapido	13
<i>G. Teleki</i> : L'examen des niveaux de la lunette zénithale par la méthode de Vassiliev	25
<i>G. Teleki</i> : Sur la conformité de la détermination de la constante micrométrique à l'aide des couples zénithales du catalogue de Washington	29